

HERBERT BREGER

DAS KONTINUUM BEI LEIBNIZ

Wenn man das Unendliche in seiner *Funktion* für das Leibnizsche Denken mit einem kurzen Schlagwort charakterisieren möchte, dann kann man es mit der dialektischen Methode und ihrer Funktion für die Philosophie Hegels vergleichen. Innerhalb des Leibnizschen Gedankengebäudes ist das Unendliche so etwas wie die Treppen, wodurch die verschiedenen, scheinbar heterogenen Teile miteinander verbunden und in Zusammenhang gebracht werden. In den *Nouveaux Essais* bezeichnet es Leibniz als die "maxime fondamentale"¹ seiner Philosophie, daß der Grund der Dinge überall derselbe ist, während "les manieres et les degrés de perfection varient à l'infini". Die unbekannteren Dinge werden nach dem Vorbild und als Variation der bekannten Dinge gedacht. Der Begriff des Unendlichen erlaubt, heterogene Qualitäten als unterschiedliche Ausprägungen derselben Grundprinzipien zu verstehen. So wird die äußerste Sparsamkeit der Erklärungsprinzipien mit der verschwenderischen Fülle der erklärten Dinge vereinbart, und das scheinbar Unbegreifliche wird als unendlicher Grenzfall des Begreiflichen eingeordnet. In aller Kürze möchte ich dazu einige Beispiele anführen.

Da ist zunächst das in der Tradition viel diskutierte Problem von *ars* und *natura*. Nach einem alten Grundsatz verstehen wir im eigentlichen Sinne nur das, was wir selbst herstellen können. Die *ars* bietet also keine grundsätzlichen Verständnisschwierigkeiten, und Leibniz hat das mechanistische Programm der Naturerklärung uneingeschränkt übernommen². Die Grenzen dieses Programms werden aber beispielsweise am Vergleich von belebter und unbelebter Materie deutlich. Das auf Einheitlichkeit der Erklärungsprinzipien abzielende mechanistische Programm wird nun durch den Begriff des Unendlichen mit der Einsicht in die Grenzen des Programms verbunden: Das wahre und zu wenig beachtete Unterscheidungskriterium zwischen Natur und Kunst ist, "ut quaevis machina naturalis... organis constet prorsus infinitis"³. Eben darin

¹ A VI, 6, S. 490.

² GP IV, S. 210-211; GP VII, S. 265.

³ GP IV, S. 505, S. 396; GP VI, S. 618; A VI, 6, S. 329.

erweisen sich die Naturobjekte als Produkte der unendlichen Weisheit und Macht Gottes. Der Unterschied zwischen der göttlichen Maschine, der Natur, und den menschlichen Maschinen ist unendlich, das heißt sowohl qualitativ als auch bloß quantitativ.

Das zweite Beispiel ist die Beziehung von notwendigen und zufälligen Wahrheiten und im Zusammenhang damit das Labyrinth der Freiheit⁴. Der Begriff des Unendlichen ermöglicht es Leibniz, einerseits an der analytischen Theorie der Wahrheit (und damit an der grundsätzlichen Gleichartigkeit aller Wahrheiten) festzuhalten und andererseits die Existenz nicht-notwendiger Wahrheiten (und damit die grundsätzliche Verschiedenheit notwendiger und zufälliger Wahrheiten) zu behaupten.

Das dritte Beispiel ist die Individualität, die das Unendliche einschließt; das Prinzip der Individuation einer Sache kann nur der begreifen, der das Unendliche begreifen kann⁵. Das Unendliche ermöglicht es hier, auf der einen Seite an der absoluten Einmaligkeit der Phänomene festzuhalten und auf der anderen Seite dennoch generalisierende Gesetzaussagen über das Geschehen im Bereich der Phänomene zu machen, das heißt Physik zu treiben.

In diesen drei Beispielen tritt das Unendliche in seiner einfachsten Form auf, nämlich als Unendlichkeit der natürlichen Zahlen. Die geschilderte Funktion des Unendlichen – nämlich Heterogenes als aus einem einheitlichen Grundprinzip erzeugt zu denken – kommt dem Kontinuum, einer erheblich komplizierteren Form des Unendlichen, in noch höherem Maße zu. Das Kontinuum ist wohl die wichtigste Form, in der das Unendliche bei Leibniz auftritt. Dabei ist nicht wie in der heutigen Mathematik an eine Menge von Punkten, sondern an ein anschauliches Kontinuum geometrischer Größen zu denken. Das Kontinuitätsprinzip besagt, daß das Kontinuum ein universales Schema des Denkens und der Erkenntnis ist, demzufolge Heterogenes, ja sogar Widersprüchliches, in gewisser Hinsicht homogenisiert und aus einem einheitlichen Prinzip erzeugt werden kann. So kann die Ruhe als eine unendlichkleine Bewegung und die Gleichheit als eine unendlichkleine Ungleichheit verstanden werden⁶; allgemein kann das Ausgeschlossene in einem gewissen Sinne als ein Eingeschlossenes behandelt werden⁷. Das Krumme kann in gewisser Weise als eine Art des Geradlinigen behandelt werden; die Kurve

⁴ GP VII, S. 200; G. W. LEIBNIZ, *Nouvelles lettres et opuscules inédits*, éd. Foucher de Careil, Paris 1857, S. 178-185.

⁵ A VI, 6, S. 289-290.

⁶ GM VI, S. 130; GM VII, S. 25; GP VI, S. 321.

⁷ GM V, S. 385.

kann betrachtet werden, als sei sie ein Polygon, d. h. das für das Polygon Bewiesene gilt auch für die Kurve (*cum grano salis* natürlich). Ganz offensichtlich hat also das Kontinuitätsprinzip einen gewissen paradoxen Charakter, den es mit der Dialektik im Sinne Hegels teilt. Dieses Paradoxe ist kein statischer logischer Widerspruch, sondern ein treibendes, dynamisches Moment, das die Vielfalt der Dinge mit einer Ökonomie des Denkens vereinigt. Es ist beeindruckend zu sehen, wie Leibniz auf der einen Seite das Kontinuitätsprinzip souverän und mit außerordentlicher Fruchtbarkeit handhabt und auf der anderen Seite offenbare Schwierigkeiten mit dessen paradoxen Charakter hat: Die analytische Theorie der Wahrheit, derzufolge das Kontinuitätsprinzip sich schließlich in Definitionen und logische Identitäten auflösen lassen muß, und das Kontinuitätsprinzip stehen in einem offenbaren Spannungsverhältnis.

Soweit ich sehe, hat sich Leibniz mit diesem Problem nur gelegentlich und sozusagen *en passant* beschäftigt. In der Aufzeichnung *Initia rerum mathematicarum metaphysica* wird davon gesprochen, daß ein Genus (Bewegung, Ungleichheit, Kurve) in einer entgegengesetzten Quasi-Species (Ruhe, Gleichheit, Polygon) auslaufe⁸. Die eigentliche Aussage des Kontinuitätsprinzips liegt also nicht nur in dem Postulat, daß eine kontinuierliche Verbindung existiere, sondern auch darin, daß von zwei entgegengesetzten Begriffen der eine als Genus, der andere als Quasi-Species interpretiert wird. Leibniz fährt an der erwähnten Stelle mit folgendem Hinweis auf die apagogische Methode des Archimedes fort: "Et hic pertinet illa ratiocinatio quam Geometrae dudum admirati sunt, qua ex eo quod quid ponitur esse, directe probatur id non esse, vel contra, vel qua quod velut species assumitur, oppositum seu disparatum reperitur. Idque continui privilegium est;" ("Und hierauf bezieht sich jene Argumentation, über die sich die Mathematiker seit langem wundern, nämlich daß aus der Annahme, daß etwas sei, direkt bewiesen wird, es sei nicht, oder umgekehrt, beziehungsweise es wird etwas als eine Species angenommen und dann ein Entgegengesetztes oder ein Widerspruch gefunden. Und das ist das Sonderrecht des Kontinuums;"). Hier wird also dem Kontinuum so etwas wie eine dialektische Hervorbringungskraft zugeschrieben (im Sinne der formalen Logik könnte man sagen: A impliziert Nicht-A). Mit der gleichen Problematik befaßt sich Leibniz in einem Brief an Christian Wolff, der 1713 in den *Acta Eruditorum* veröffentlicht wurde. In einer kontinuierlichen Anordnung ist der letzte Fall, auch wenn er von völlig verschiedener Natur ist, im allgemeinen Gesetz der übrigen Fälle enthalten. Anders gesagt, "paradoxa quadam ratione" oder auch "*Figura Philosophico-rhetorica*" kann der Spezialfall als im allgemeinen Fall enthaltene entgegengesetzte Verschiedenheit verstanden werden. Man

⁸ GM VII, S. 25.

gelangt so zu Aussagen (wie: Punkt als unendlichkleine oder verschwindende Linie), die Joachim Jungius "toleranter vera"⁹ genannt hat. Solche Aussagen sind sehr nützlich zur *ars inveniendi*, wenngleich sie "aliquid fictionis et imaginarii" enthalten; da die Reduktion solcher Aussagen auf übliche Ausdrücke leicht sei, könne aber kein Fehler unterlaufen. Mir will freilich scheinen, daß die Reduktion der Aussage "Die Gleichheit ist eine unendlichkleine Ungleichheit" auf Definitionen und logische Identitäten durchaus nicht unproblematisch ist, die analytische Wahrheitstheorie hier folglich vor einer Aporie steht¹⁰.

Die beschriebene Funktion des Kontinuitätsprinzips, das qualitativ Verschiedenartige so zu betrachten, als sei es homogen, steht im geistesgeschichtlichen Zusammenhang des mechanistischen Denkens, das sich die Reduktion der Qualitäten zum Ziel gesetzt hatte, und insbesondere des Begriffs der Bewegung. Ein interessantes Beispiel für die Rolle des Bewegungsbegriffs in der Mathematik des 17. Jahrhunderts ist das Rektifikationsproblem, d.h. das Problem, eine gerade Linie zu finden, die ebenso lang ist wie eine gegebene Kurve. Seit Aristoteles hatten das Gerade und das Krumme als zwei verschiedene Qualitäten gegolten, für die es kein gemeinsames Maß geben kann¹¹. Das Rektifikationsproblem ist demnach mathematisch unlösbar; noch Descartes war in der *Géométrie* dieser Ansicht¹². Torricelli und Roberval leiteten mit Hilfe des Bewegungsbegriffes eine Wende in dieser Frage ein. Wenn man auf einer geraden und einer krummen Linie je einen Punkt mit gleicher Geschwindigkeit laufen läßt, wenn beide Punkte im selben Augenblick starten und gleichzeitig ihre Bewegung beenden, dann ist es für mechanistisches Denken eine überzeugende Folgerung, daß die zurückgelegten Wege gleich lang sind. Auf diesem Grundgedanken basieren die Beweise von Torricelli und Roberval zur Lösung von Rektifikationsproblemen¹³. Nachdem so der Durchbruch gelungen war, gelang es später auch, die Beweise ohne den (unmathematischen) Bewegungsbegriff zu führen. Es gibt zahlreiche Beispiele dafür, daß der Bewegungsbegriff in der Mathematik des 17. Jahrhunderts Pionierleistungen ermöglicht hat: Nepers Definition des Logarithmus, Tangentenbestimmungen von Torricelli und Roberval sowie Newtons Fluxionsmethode sind

⁹ GM V, S. 385.

¹⁰ Leibniz denkt offenbar daran, daß eine Reduktion mit Hilfe der apagogischen Methode möglich sei.

¹¹ ARISTOTELES, *Physikvorlesung*, Buch VII, Kapitel 4; A. G. KAESTNER, *Geschichte der Mathematik*, Bd. 1, Hildesheim-New York 1970, S. 498.

¹² R. DESCARTES, *Oeuvres*, éd. Adam-Tannery, Bd. 6, S. 412.

¹³ H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert*, New York-Stuttgart 1966, S. 340.

nur einige davon¹⁴. In allen diesen Fällen übernahm der Bewegungsbegriff Aufgaben, die später von der Theorie des Kontinuums übernommen wurden.

Die mathematische Behandelbarkeit mechanischer Bewegungen – sei es durch die Hereinnahme des Bewegungsbegriffs in die Mathematik, sei es durch eine Theorie des Kontinuums – war selbstverständlich eine entscheidende Voraussetzung für die Anwendbarkeit von Mathematik auf die Physik. In diesen Anwendungen treten fast immer transzendente Ausdrücke auf, die in der cartesischen Mathematik unzulässig waren und die erst Leibniz in die Mathematik eingeführt hat¹⁵. Erst durch die Einführung des Transzendenten wurde das Kontinuum zum mathematisch legitimen Objekt; bei Euklid und Descartes waren nur die konstruierbaren Punkte mathematisch zulässig gewesen. Transzendente Ausdrücke wurden in vielen Fällen durch eine unendliche Reihe (zum Beispiel einen unendlichen Dezimalbruch) gegeben. Leibniz bezeichnet die Differential- und Integralrechnung häufig als „Analyse des transcendentes“; sie sei derjenige Teil der allgemeinen Mathematik, der das Unendliche behandelt. Die „Analyse des transcendentes“ sei besonders wichtig für die Anwendungen in der Physik, „parce que le caractère de l'Auteur infini entre ordinairement dans les opérations de la nature“¹⁶. Das Unendliche in der Differentialrechnung korrespondiert in diesem Sinne mit jenem Unendlichen, das (wie oben erwähnt) das charakteristische Kennzeichen der Natur ist.

Obgleich das Kontinuum von entscheidender Bedeutung für die Naturerkenntnis ist, muß dennoch das Mißverständnis abgewehrt werden, als sei das Kontinuum etwas real Existierendes. Nach Leibniz gibt es weder im Bereich der Monaden noch im Bereich der Phänomene ein Kontinuum. Die Materie ist aktual unendlich geteilt, bildet also kein Kontinuum; Raum und Zeit sind nur Ordnungen von Phänomenen und nichts selbständig Existierendes. Das Kontinuum ist etwas Ideales; es bezieht sich auf Mögliches. Auf reale Phänomene bezieht es sich nur insofern, als es sich dabei um mögliche Phänomene handelt. Im Briefwechsel mit de Volder legt Leibniz diesen Sachverhalt dar¹⁷. Die Teile in einem Kontinuum sind nämlich – wie schon Aristoteles gezeigt¹⁸ hatte – unbestimmt. Im Bereich der realen Phänomene gibt es aber nichts Unbestimmtes, dort ist jede mögliche Teilung bereits vollzogen. Die realen

¹⁴ ZEUTHEN, aaO., S. 134, S. 320-323.

¹⁵ H. BREGER, *Leibniz' Einführung des Transzendenten*, in: „Studia Leibnitiana“, Sonderheft 14 (= 300 Jahre Nova Methodus von Leibniz), 1986.

¹⁶ GM V, S. 308.

¹⁷ GP II, S. 282. Vgl. außerdem GP III, S. 612, S. 622-623; GP IV, S. 394; GP II, S. 379; GM IV, S. 93.

¹⁸ ARISTOTELES, *Physikvorlesung*, Buch VI.

Phänomene setzen sich aus ihren Teilen zusammen wie eine ganze Zahl aus Einsen; im Kontinuum gibt es aber zunächst nur der Möglichkeit nach Teile, ebenso wie es unendlich viele Möglichkeiten gibt, die Zahl 1 als Summe zweier Brüche zusammensetzen. Die Verwechslung des Realen mit dem Idealen würde zu unauflösbaren Widersprüchen führen. Die "scientia continuorum hoc est possibilium" enthält also ewige Wahrheiten, die von den realen Phänomenen niemals verletzt werden, weil der Unterschied stets kleiner als jede angebbare Größe ist¹⁹.

Die soeben skizzierte Theorie des Kontinuums ist übrigens ein von Leibniz oft hervorgehobener Differenzpunkt zu Newton und zu Descartes²⁰. Nach Newton existieren Raum und Zeit wirklich, nach Descartes ist die Ausdehnung eine Substanz. In beiden Fällen ist das Kontinuum also etwas Reales. Etwas Reales, das Teile hat, muß aber auch aus diesen Teilen bestehen. Folglich werden die bekannten Antinomien des Kontinuums für Newton und Descartes unvermeidbar. Da die Raumlehre für Newton und die Substanzlehre für Descartes zentral sind und da Leibniz' Differentialrechnung wesentlich auf der Theorie des Kontinuums basiert, handelt es sich hier um einen entscheidenden Streitpunkt.

Ich möchte damit meine Ausführungen zur Funktion des Kontinuums bei Leibniz beenden und mich nun der *Entwicklungsgeschichte* des Kontinuums bei Leibniz zuwenden. Er hat in seinen jungen Jahren eine ganze Reihe von tastenden Versuchen unternommen, sich über die Struktur des Kontinuums klar zu werden. Erst allmählich und in verschiedenen Schritten ist er zu der Theorie vorgedrungen, an der er dann zeit seines Lebens festgehalten hat. Diese Entwicklung²¹ ist so komplex, daß ich mich hier mit der Skizzierung einiger weniger Stationen begnügen muß.

Unter Bezugnahme auf zeitgenössische Diskussionen (Fromond, Descartes, Thomas White, Hobbes etc.) sieht Leibniz in der *Theoria motus abstracti* vom Winter 1670/71 die Schwierigkeiten um das Labyrinth des Kontinuums als entscheidende Grundlagenprobleme der Wissenschaften²². Er versucht diese Schwierigkeiten durch Thesen zu lösen, die in klarem Widerspruch zu seiner reifen Theorie des Kontinuums stehen²³. Er postuliert die Existenz von aktual unendlich vielen Teilen in einem Kontinuum. Es gibt nichts in einem Kontinuum, was keinen Teil hätte, aber es gibt Indivisiblen, die als unausgedehnt

¹⁹ GP II, S. 282-283.

²⁰ GP II, S. 278-279; GP III, S. 612, S. 622-623.

²¹ Vgl. dazu auch den Aufsatz von E. Knobloch in diesem Band.

²² A VI, 2, S. 262.

²³ A VI, 2, S. 264-265.

definiert werden. Die Existenz von Indivisiblen wird daraus gefolgert, daß sich ohne sie der Anfang einer Bewegung nicht denken ließe (einige Zeilen weiter tritt denn auch der Hobbessche Begriff des *conatus* auf). Der Punkt wird in bewußtem Gegensatz zu Euklid als etwas definiert, was keine Ausdehnung hat oder dessen Teile keine Entfernung haben oder deren Entfernung kleiner als jede angebbare Größe ist. Leibniz ist hier noch vorbehaltloser Anhänger der Cavalierischen Indivisiblen-Methode. Seine mathematischen Kenntnisse sind noch gering; so definiert er in einer Aufzeichnung aus der zweiten Hälfte 1671 das Kontinuum als ein Ganzes, das die Eigenschaft hat, daß sich zwischen je zwei Teilen weitere Teile befinden²⁴. In der Terminologie der modernen Mathematik wird damit nur die Dichtheit definiert; auch die rationalen Zahlen liegen dicht, bilden aber keineswegs ein Kontinuum²⁵.

Etwa ein Jahr später hat Leibniz jedoch bereits wichtige Fortschritte gemacht. Im Herbst 1672 trifft er zum ersten Mal mit Christiaan Huygens zusammen, der ihn auf Wallis' *Arithmetica infinitorum* und das *Opus geometricum* des Grégoire de St. Vincent hinweist. In dieser Zeit exzerpiert Leibniz Galileis Beweis, daß es ebenso viele natürliche Zahlen wie Quadratzahlen gebe. Galilei hatte daraus gefolgert (ebenso wie Grégoire de St. Vincent im Zusammenhang mit dem Kontingenzwinkel), daß im Unendlichen das Ganze nicht größer sei als die Teile. Leibniz widerspricht dem; er entwickelt hier die (für sein ganzes weiteres Leben gültige) Auffassung, daß das Unendliche kein Ganzes, keine Einheit sei²⁶. Ebenfalls aus dieser Zeit (Herbst 1672 – Winter 1672/73) stammt eine Aufzeichnung²⁷, in der Leibniz die Existenz von Indivisiblen mathematisch zu widerlegen versucht. Die Diagonale eines Quadrats muß ebenso viele Indivisiblen haben wie eine Seite, denn jeder Punkt der Diagonale läßt sich (durch Fällen eines Lots) mit je einem Punkt der Seite verbinden. Andererseits ist die Diagonale länger als die Seite und muß daher mehr Indivisiblen haben. Also führen Indivisiblen in Widersprüche. Für den mathematischen Fachmann der Zeit bot der Beweis nichts Neues; er ist nur als Entwicklungsschritt des Leibnizschen Denkens bemerkenswert. Die Kritik an der Indivisiblen-Theorie ist eine Kritik am Aktual-Unendlichen in der Mathematik: Weder ist das Kontinuum aus aktual-unendlich vielen Punkten zusammengesetzt noch darf die unendliche Teilbarkeit des Kontinuums mit einer faktisch

²⁴ A VI, 2, S. 307.

²⁵ Später war Leibniz sich dieses Unterschieds bewußt, vgl. GM VII, S. 287.

²⁶ A VI, 3, S. 168. Zur Wichtigkeit des Axioms vom Ganzen und Teil für Leibniz vgl. auch J. E. HOFMANN, *Leibniz in Paris 1672-1676*, Cambridge 1974, S. 12-14 und A III, 1, S. 11-19.

²⁷ A VI, 3, S. 97-101. Das Argument gegen die Existenz von Indivisiblen findet sich auch A VI, 3, S. 469.

schon vollzogenen unendlichen Geteiltheit verwechselt werden. Dieser Zusammenhang wird dadurch unterstrichen, daß Leibniz in derselben Aufzeichnung die Galileische Überlegung von der Gleichmächtigkeit der natürlichen Zahlen und der Quadratzahlen wieder aufnimmt und daraus folgert, daß es keine unendliche Zahl (d. h. kein Unendliches als Ganzheit) geben könne. Eine unendliche Zahl müßte nämlich einem echten Teile ihrer selbst gleich sein, und das ist unmöglich. Mehr noch: Eine unendliche Zahl ist ein Nichts, ist gleichbedeutend mit der Null²⁸.

Soweit könnte es scheinen, als sei Leibniz nun wieder auf Descartes' Position, daß sich über das Unendliche nichts Gewisses sagen lasse, gelangt. Doch das ist nicht der Fall. Dieselbe Überlegung, mit der Leibniz in der *Theoria motus abstracti* die Existenz von Indivisiblen bewiesen hatte, benutzt er nun²⁹, um die Existenz von Infinitesimalien zu beweisen: Es muß Infinitesimalien geben, weil sich sonst der Anfang einer Bewegung nicht denken ließe. Diese frühen Infinitesimalien sind Punkte, jedoch Punkte von verschiedener Größe; ein Punkt kann unendlich kleiner sein als ein anderer Punkt. Ein Punkt kann als eine Linie von beliebig kleiner Länge aufgefaßt werden. Der begriffliche Fortschritt, den Leibniz in dieser Aufzeichnung vom Herbst 1672 oder Winter 1672/73 erzielt, besteht darin, daß das Kontinuum ansatzweise dynamisch aufgefaßt wird. Nach der Indivisiblen-theorie besteht das Kontinuum aus aktual-unendlich vielen unveränderlichen Bausteinen; wegen des statischen Charakters dieser Theorie fällt es nicht schwer, Paradoxien zu konstruieren. Mit dem Begriff der Infinitesimalie wird dagegen ansatzweise versucht, das Fließende des Kontinuums wiederzugeben. Die starre Trennung zwischen Ausgedehntem und Unausgedehntem wird aufgegeben, die Infinitesimalien liegen gewissermaßen auf der Grenze zwischen Ausgedehntem und Unausgedehntem; sie bezeichnen den Anfang einer Bewegung oder den Anfang eines ausgedehnten Körpers und bilden insofern ein fließend-dynamisches Moment.

In den folgenden Jahren befaßt sich Leibniz immer wieder in neuen Ansätzen mit diesen Fragen. Dabei werden auch Fragen, die bereits im Sinne der reifen Theorie beantwortet worden sind (wie die Nicht-Existenz unendlicher Zahlen), wieder aufgeworfen und erneut untersucht³⁰. In anderer Hin-

²⁸ A VI, 3, S. 98, S. 168; A III, 1, S. 2, S. 11. Zur Begründung könnte man wie folgt argumentieren: Da die unendliche Zahl x einem echten Teil gleich sein müßte, folgt $x = q x$, wobei q größer als Null und kleiner als Eins ist. Daraus folgt $(1-q) x = 0$ und $x = 0$. Äußerungen des reifen Leibniz zur Unmöglichkeit unendlicher Zahlen sind u. a. GP II, S. 305; GM III, S. 535.

²⁹ A VI, 3, S. 98-99.

³⁰ A VI, 3, S. 477, S. 495-504.

sicht werden erkennbare Fortschritte in Richtung auf die reife Theorie erzielt; so gibt Leibniz zum Beispiel die These, daß es unterschiedlich große Punkte gibt, bald wieder auf. Auch die Frage nach dem Verhältnis zwischen der mathematischen Theorie des Kontinuums und der physikalischen Theorie der Bewegung wird in verschiedenen Ansätzen der Pariser Jahre unterschiedlich gedeutet. Auf all diese Fragen möchte ich hier nicht eingehen, sondern stattdessen einen Sprung in das Jahr 1676, das Ende des Pariser Aufenthalts, machen. In der Aufzeichnung *Pacidius Philalethi* (29. Oktober – 10. November 1676) wird die reife Theorie des Kontinuums formuliert, die Leibniz seitdem nur immer wiederholt hat: Das Kontinuum ist durch die Möglichkeit beliebiger Teilbarkeit charakterisiert; es setzt sich nicht aus Punkten zusammen, vielmehr entstehen Punkte erst dadurch, daß Teilungen vorgenommen werden. Niemals geschehen alle Teilungen, die möglich sind. Es gibt keine bestimmte Zahl für die Anzahl der in einem Kontinuum angebbaren Punkte³¹. Ganz offensichtlich erinnert diese Theorie des Kontinuums stark an Gedanken, die im 20. Jahrhundert von Intuitionisten und Konstruktivisten entwickelt worden sind³².

In der erwähnten Aufzeichnung vom Herbst 1672 oder Winter 1672/73 hatte Leibniz die Existenz von Infinitesimalien bewiesen. Später schien ihm dieser Beweis nicht überzeugend; in einer Aufzeichnung aus dem Februar 1676 wirft er erneut die Frage auf, ob sich die Existenz von infinitesimalen Größen beweisen lasse³³. In der Aufzeichnung *Pacidius Philalethi* ist von einem solchen Beweis keine Rede mehr: die infinitesimalen Größen dürfen in der Geometrie verwendet werden "inventionis causa, licet essent imaginaria"³⁴. Offen ließ Leibniz dabei die Frage, ob die infinitesimalen Größen in der Natur vorhanden sind (wie denn überhaupt die in *Pacidius Philalethi* entwickelte Theorie der physikalischen Bewegung von der reifen Theorie der Bewegung abweicht). Später war für Leibniz klar, daß es Infinitesimalien nur in der Mathematik (also nur im Reich des Idealen) gibt und auch dort nur als Fiktionen³⁵.

Zur Abrundung der Ausführungen über die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Gedanken zum Kontinuum möchte ich noch auf ein Problem

³¹ A VI, 3, S. 552-553, S. 555. Vgl. zum Beispiel auch GP II, S. 279.

³² H. BREGER, *Leibniz, Weyl und das Kontinuum*, in: "Studia Leibnitiana Supplementa", Bd. 26 (= Beiträge zur Wirkungs- und Rezeptionsgeschichte von Leibniz), 1986, S. 316-330.

³³ A VI, 3, S. 475.

³⁴ A VI, 3, S. 564.

³⁵ Das Unendlichkleine tritt bei Leibniz auch im Zusammenhang mit dem *conatus* auf, aber auch in diesem Fall handelt es sich um einen mathematischen Begriff (vgl. GM VI, S. 234, S. 238).

eingehen, das Leibniz am Schluß einer unveröffentlichten Aufzeichnung aus dem Jahre 1673 aufgeworfen hat. Im Zusammenhang mit Erörterungen über unendliche Reihen und infinitesimale Größen stellt Leibniz die Frage, "an non rectius dicetur non esse aequalia, sed differentiae quavis data minoris"³⁶. Um ein Beispiel zu nehmen: Ist die Fläche eines Viertelkreises vom Radius 1 gleich

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots$$

oder gibt es einen Unterschied, der nur eben kleiner als jede angebbare Größe ist? Auf den ersten Blick scheint diese Frage unverstündlich oder gar sinnlos. Da die Differenz zwischen zwei Zahlen (Flächeninhalt und Wert der Reihe) wieder eine Zahl ist und da diese Zahl kleiner als jede angebbare Größe ist, muß diese Zahl also Null sein (jedenfalls vom Standpunkt der heutigen Standard-Mathematik). Diese Überlegung hat jedoch zur Voraussetzung, daß es für den Flächeninhalt eine Zahl gibt. Weil diese Voraussetzung nicht selbstverständlich ist, ist Leibniz' Frage durchaus sinnvoll. James Gregory war 1668 in seiner berühmten Schrift *Vera circuli et hyperbolae quadratura* davon ausgegangen, daß es keine Zahl für das Verhältnis von Kreisfläche und Radiusquadrat gibt, und auch John Wallis hatte dieses Verhältnis als "numerus ille impossibilis" bezeichnet³⁷. Wenn es nun für einen bestimmten Flächeninhalt keine Zahl gibt, weil das Zahlensystem (wie in der cartesischen Mathematik) an dieser Stelle ein Loch hat, dann läßt sich der Flächeninhalt eben nicht exakt berechnen, sondern nur approximieren derart, daß der Unterschied zum wahren Wert kleiner als jede angebbare Größe ist. In moderner Terminologie handelt es sich hier um das Problem, daß der Raum der algebraischen Zahlen nicht vollständig ist und folglich nicht alle Cauchy-Folgen in diesem Raum konvergieren. Erst durch die Einführung des Transzendenten hat Leibniz dieses Problem gelöst³⁸.

Die gleiche Frage hat Leibniz drei Jahre später in einer Aufzeichnung vom 26. März 1676 aufgeworfen, – mit dem geringen Unterschied, daß er statt "kleiner als jede angebbare Größe" "unendlich klein" sagt³⁹. Die Frage lautet dann, ob bei einer Quadratur der berechnete Wert und der wahre Wert gleich sind oder ob es einen unendlichkleinen Unterschied gibt. In dieser Formulierung läuft die Frage also darauf hinaus, ob das Kontinuitätsprinzip (Gleichheit

³⁶ LH XXXV, XII, 2, Bl. 164 v°.

³⁷ J. WALLIS, *Opera Mathematica*, Oxford 1695, S. 359.

³⁸ H. BREGER, *Leibniz' Einführung des Transzendenten*, aaO.

³⁹ A VI, 3, S. 434 (auch gedruckt in GM V, S. 217-218).

als unendlichkleine Ungleichheit) gültig ist. In der Tat entsteht ja erst durch die Einführung des Transzendenten ein Kontinuum; ohne das Transzendente wäre das Kontinuitätsprinzip in der Mathematik ungültig.

Zum Abschluß möchte ich noch kurz die Frage erörtern, ob es das *Aktual-Unendliche* in der Leibnizschen Mathematik gibt. Leibniz hat sich sehr entschieden für das Aktual-Unendliche in der Metaphysik ausgesprochen⁴⁰, doch ist damit die Frage für die Mathematik noch nicht beantwortet. Der Leibnizsche Begriff des Aktual-Unendlichen ist ein anderer Begriff als der Begriff des Aktual-Unendlichen in der Grundlagendiskussion der Mathematik des 20. Jahrhunderts. Das Aktual-Unendliche der Leibnizschen Metaphysik ist kein Ganzes und keine Einheit, es ist lediglich die aktual existierende Vielheit von mehr Dingen als sich mit irgendeiner Zahl angeben läßt⁴¹. Eine Ausnahme (die einzige) bildet natürlich Gott: er ist sowohl aktualunendlich als auch eine Ganzheit. Insofern ist also auch das von Leibniz in der Metaphysik akzeptierte Aktual-Unendliche kein Aktual-Unendliches im Sinne der Cantorschen Mathematik.

Wie bestimmt nun Leibniz das Unendliche in der Mathematik? In der Mathematik befinden wir uns nach Leibniz ohnehin nur im Bereich des Idealen und des Möglichen. Das mathematische Unendliche kann als unendliche Vielheit oder als unendliche Größe auftreten. Die unendliche Vielheit bildet kein Ganzes, sie stellt lediglich eine Vielheit dar, die größer ist als sich mit irgendeiner Zahl angeben läßt. Ebenso ist die unendliche Größe (zum Beispiel einer geraden Linie) lediglich eine Größe, die größer als jede angebbare Größe ist⁴². Auch in den *Nouveaux Essais* hat Leibniz die Unendlichkeit einer geraden Linie potentialistisch bestimmt, nämlich als Möglichkeit, jede endliche gerade Linie zu verlängern⁴³. In diesem Sinne hat Christian Wolff in seinem Mathematischen Lexicon unter Berufung auf Euklid die unendliche Linie als eine beliebig verlängerbare Linie definiert⁴⁴. Weder die unendliche Vielheit noch die unendliche Größe bilden ein Ganzes oder eine Einheit⁴⁵. Für das mathematische Aktual-Unendliche ist aber gerade charakteristisch, daß unendlich viele Objekte nicht nur potentiell oder nacheinander, sondern gleichzeitig und als Gesamtheit gegeben sind und erfaßt werden können. Ein Cantorsches Aktual-Unendliches – das heißt ein Unendliches, das ein Ganzes ist und dennoch gleichmächtig mit einem echten Teil – bezeichnet Leibniz aus-

⁴⁰ GP I, S. 416.

⁴¹ GP II, S. 304-305; GM III, S. 535.

⁴² GP II, S. 304.

⁴³ A VI, 6, S. 158 und GP III, S. 659.

⁴⁴ CH. WOLFF, *Gesammelte Werke*, I. Abteilung, Bd. 11, Hildesheim 1965, Spalte 743.

⁴⁵ GM III, S. 535; GM IV, S. 575; GP II, S. 304-305.

drücklich als etwas Absurdes⁴⁶. Erstaunlicherweise wird in der Sekundärliteratur dennoch immer wieder die Behauptung wiederholt, es gebe eine Ähnlichkeit zwischen Leibniz und Cantor⁴⁷.

Im Briefwechsel mit Johann Bernoulli führt Leibniz aus, was unter einer unendlichen Reihe zu verstehen sei. Wenn man davon spricht, daß unendlich viele Glieder der Reihe gegeben sind, dann ist nicht gemeint, daß eine feste Anzahl gegeben ist, sondern daß es mehr Glieder gibt, als jede feste Anzahl angibt⁴⁸. Leibniz will die unendlichen Reihen also potentialistisch verstanden wissen. Daraus folgt insbesondere, daß unendliche Dezimalbrüche potentialistisch aufzufassen sind. Die von Foucher de Careil veröffentlichte Aufzeichnung *De libertate*⁴⁹ bestätigt dies. In dieser Aufzeichnung vergleicht Leibniz das Kontinuum mit den notwendigen und zufälligen Wahrheiten. Dabei entsprechen die notwendigen Wahrheiten den rationalen Zahlen und die zufälligen Wahrheiten den irrationalen Zahlen. Wie sich die notwendigen Wahrheiten in endlich vielen Schritten beweisen lassen, so lassen sich die rationalen Zahlen in endlich vielen Schritten berechnen. Der Beweis einer zufälligen Wahrheit oder die Berechnung einer irrationalen Zahl bedürfte aber einer unendlichen Analyse. Der springende Punkt ist nun, daß der Beweis einer zufälligen Wahrheit nie vollendet werden kann; Leibniz betont ausdrücklich, daß selbst für Gott der Beweis einer zufälligen Wahrheit unmöglich ist (wenngleich Gott eine solche Wahrheit "infallibili visione" erkennen kann). Offenbar steht für Leibniz außer Frage, daß die Berechnung eines unendlichen Dezimalbruchs nie als vollendet gedacht werden kann, – anderenfalls wäre der Vergleich zwischen den Zahlen des Kontinuums und den Wahrheiten sinnlos.

In einem Brief an Varignon aus dem Jahre 1702 bemerkt Leibniz, "que l'infini pris à la rigueur doit avoir sa source dans l'interminé"⁵⁰. Diese Bemerkung zeigt, daß die von Leibniz in der Pariser Zeit häufig erörterten Begriffe "infinitum interminatum" und "infinitum terminatum"⁵¹ auch in seinem späteren Denken eine Rolle spielen. Ein *infinitum terminatum* ist ein begrenztes Unendlich; Leibniz nennt als Beispiel eine gerade Linie mit einem letzten

⁴⁶ GM III, S. 535.

⁴⁷ Vgl. z. B. M. OSTERHELD-KOEPKE, *Der Ursprung der Mathematik aus der Monadologie*, Frankfurt/Main 1984.

⁴⁸ GM III, S. 566.

⁴⁹ G. W. LEIBNIZ, *Nouvelles lettres et opuscules inédits*, aaO.; vgl. auch die ähnliche Stelle GP VII, S. 200, wo ausdrücklich gesagt wird, daß die irrationalen Zahlen als *series interminata* aufzufassen sind.

⁵⁰ GM IV, S. 91.

⁵¹ Die Kenntnis dieser beiden Begriffe verdanke ich E. Knobloch, auf dessen Aufsatz in diesem Band ich ausdrücklich verweisen möchte.

Punkt im Unendlichen⁵². Leibniz scheint schon in der Pariser Zeit Zweifel an der mathematischen Brauchbarkeit eines *infinitum terminatum* gehabt zu haben⁵³; später scheint er das *infinitum terminatum* für die Mathematik abgelehnt zu haben⁵⁴. Ob der Gegensatz von *infinitum terminatum* und *infinitum interminatum* etwas mit dem Gegensatz von potentiell und aktuellem Unendlich zu tun hat, braucht hier nicht entschieden zu werden⁵⁵.

Eine Reihe von Formulierungen deuten darauf hin, daß Leibniz verschiedene Stufen des Unendlichen angenommen hat. Es ist zu prüfen, ob dies die Behauptung stützt, daß Leibniz das Aktual-Unendliche in der Mathematik verwendet habe. Äußerungen aus der Frühzeit⁵⁶ sind dabei natürlich ohne Beweiskraft für die Ansicht des reifen Leibniz. Aber noch 1679 schreibt er in einem Brief⁵⁷, daß

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

eine "quantitas infinita" ist, die unendlich kleiner ist als

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Mehr noch: Er setzt den erstgenannten Ausdruck gleich B und rechnet dann mit 1+B (= Summe der harmonischen Reihe) weiter⁵⁸. Hier muß allerdings beachtet werden, daß Leibniz in einer nach 1691 entstandenen Aufzeichnung⁵⁹ ausdrücklich sagt, daß man die Summe der harmonischen Reihe nicht als eine "vera quantitas infinita" ansehen dürfe. Aber es bleibt doch die Frage, was er 1679 mit "quantitas infinita" gemeint hat. Jedenfalls gewiß keine unendliche Zahl, denn eine solche hat er schon seit seiner Pariser Zeit abgelehnt. Vielmehr spricht er an der zitierten Stelle von 1679 von "quantitas infinita, major scilicet quovis numero assignabili". Im Zusammenhang mit den

⁵² A VI, 3, S. 281, S. 471, S. 485.

⁵³ Vgl. den Aufsatz von Knobloch in diesem Band sowie A VI, 3, S. 489.

⁵⁴ GM IV, S. 91 sowie die Debatte mit Johann Bernoulli um die Existenz eines letzten Gliedes einer unendlichen Reihe (GM III, S. 566).

⁵⁵ Auf den ersten Blick scheint es, als müsse ein *infinitum terminatum* stets ein aktuelles Unendlich sein. Die Sache ist jedoch komplizierter; nach D. LAUGWITZ, *Zahlen und Kontinuum*, Darmstadt 1986, S. 237-239 läßt sich vermuten, daß auch ein *infinitum terminatum* potentialistisch verstanden werden könnte.

⁵⁶ A VI, 1, S. 229. Leibniz stützt sich hier auf G. CARDANO, *Opera*, Bd. IV, Lyon 1663, S. 195.

⁵⁷ A II, 1, S. 486.

⁵⁸ A II, 1, S. 494.

⁵⁹ LH XXXV, VII, 10, Bl. 8 v°. Die Datierung ergibt sich aus der Erwähnung der Bernoullischen Spirale.

bereits erwähnten Bemerkungen von Leibniz zum Unendlichen liegt es daher nahe, die "quantitas infinita" potentialistisch zu deuten. Diese Vermutung wird durch eine weitere Überlegung gestützt: Wenn die Summe der harmonischen Reihe größer als jede angebbare Zahl (also größer als jede endliche Partialsumme von $1+1+1+1+\dots$) ist, wie kann Leibniz dann 1679 behaupten, die Summe der harmonischen Reihe sei unendlich kleiner als die Summe der unendlichen Reihe $1+1+1+1+\dots$? Dies scheint nur dann einen Sinn zu geben, wenn die beiden *quantitates infinitae* eben nicht als statische unendliche Größen, sondern als Ausdruck für die unterschiedliche Wachstumsgeschwindigkeit der beiden unendlichen Reihen zu verstehen sind. In diesem Zusammenhang ist interessant, daß Detlef Laugwitz – zusammen mit Schmieden der Erfinder der Nichtstandard-Analyse⁶⁰ – in seinem neuesten Buch⁶¹ darauf hingewiesen hat, daß die von ihm vertretene Version der Nichtstandard-Analyse zwanglos ohne das Aktualunendlich interpretiert werden kann (obwohl es in dieser Theorie verschieden große unendliche Zahlen gibt).

An der zitierten Stelle aus dem Jahre 1679 hatte Leibniz noch unbefangenen $\frac{1}{0}$ für Unendlich geschrieben. In einer unveröffentlichten Aufzeichnung, die mehr als 20 Jahre später entstanden ist, lehnt er diese Ausdrucksweise ab; man dürfe das Unendliche lediglich als Kehrwert einer unendlichkleinen Größe (also als $\frac{1}{dx}$) schreiben⁶². In einem Brief an Grandi aus dem Jahre 1713 nennt Leibniz ein solches Unendlich eine "quantitas infinita modificata"⁶³. Da es ja Differentiale verschiedener Ordnung gibt, gibt es folglich wiederum verschiedene Stufen des Unendlichen. Ob die "quantitas infinita modificata" ein Aktualunendlich ist, hängt offensichtlich davon ab, wie die unendlichkleinen Größen zu interpretieren sind. In dem Brief an Grandi bezeichnet Leibniz die unendlichkleine Größe als verschwindende Größe oder als eine Größe "in statum annihilationis", wobei der Akkusativ die Bewegung und das Prozeßhafte noch betont. Immer wieder umschreibt er die unendlichkleinen Größen als

⁶⁰ Merkwürdigerweise wird die Priorität von Schmieden/Laugwitz oft übersehen. Die Veröffentlichungsdaten und der Inhalt der Arbeit von Schmieden/Laugwitz lassen aber keinen Zweifel: C. SCHMIEDEN / D. LAUGWITZ, *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung*, "Mathematische Zeitschrift", LXIX (1958), S. 1-39; A. ROBINSON, *Non-Standard Analysis*, Amsterdam 1966.

⁶¹ D. LAUGWITZ, *Zahlen und Kontinuum*, aaO. S. 237-239. Mit diesem Argument ist freilich nicht gemeint, die Leibnizsche Theorie stimme mit der Nichtstandard-Analyse überein. Aber die Nichtstandard-Analyse hilft, die Scheuklappen der Mathematik des 19. Jahrhunderts zu überwinden und insofern historische Theorien besser zu verstehen.

⁶² LH XXXV, VIII, 21, Bl. 2 r^o.

⁶³ GM IV, S. 218.

Größen, die kleiner als jede angebbare Größe gewählt werden können, oder als Größen im Zustand des Verschwindens⁶⁴. Dies drückt sowohl den potentialistischen Charakter der unendlichkleinen Größen als auch ihren fließenden Charakter aus. Die Infinitesimalien haben keinen festen Wert, sondern sind am ehesten mit Variablen zu vergleichen⁶⁵. Die unendlichkleinen Größen sind bekanntlich Fiktionen, das heißt, ihnen kommt keine selbständige Bedeutung zu; sie sind nur Hilfsmittel, um das Fließende des Kontinuums in einen Kalkül zu übersetzen. Sie würden diesen dynamischen Charakter verlieren, wenn man sie als aktual unendlichklein interpretierte.

Es zeigt sich also, daß sich die Äußerungen des reifen Leibniz zum mathematischen Unendlich stimmig und widerspruchsfrei miteinander vereinbaren lassen. Ein Aktualunendlich gibt es in der Leibnizschen Mathematik nicht. Das Unendlichgroße und das Unendlichkleine sind nur Fiktionen oder abgekürzte Sprechweisen ("per modum loquendi compendiosum")⁶⁶. Gemeint ist damit so etwas wie eine Variable. Wenn man auf die abgekürzte Sprechweise verzichtet, muß man das Unendliche potentialistisch bestimmen⁶⁷.

⁶⁴ GP VI, S. 90.

⁶⁵ GM IV, S. 92; H. J. M. Bos, *Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus*, "Archive for the History of Exact Sciences", XIV (1974), S. 17.

⁶⁶ GP II, S. 305.

⁶⁷ GM IV, S. 93; GP II, S. 304, S. 305.