Enrico Giusti

IMMAGINI DEL CONTINUO

l'infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile.

Galilei

Cum vero saltu ad ultimum facto ipsum infinitum aut infinite parvum dicimus, commoditati expressionis seu breviloquio mentali inservimus, sed non nisi toleranter vera loquimur, quae explicatione rigidantur.

Leibniz

Che l'infinito occupi un posto essenziale, per non dire preponderante, nelle scienze matematiche è affermazione pacifica, al punto che si può affermare che la nascita della matematica coincida con l'ingresso nel pensiero classico dei processi e dei metodi infiniti.

Cionondimeno, lo studio dell'infinito in quanto tale è tutto sommato recente, e non si afferma che alla fine del secolo scorso. Nei duemila anni che separano la nascita della geometria greca dalle profonde intuizioni di Cantor, la trattazione matematica dell'infinitamente grande non fa registrare che progressi modesti, quasi che l'immensità dell'oggetto valga a precludere ogni sua analisi approfondita. Così chi voglia studiare la storia dell'infinito matematico dovrà rivolgersi piuttosto alla sua immagine speculare, ed indagare l'evoluzione dei temi e delle teorie legate all'infinitamente piccolo.

---

* Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del programma di ricerca: «Storia delle Matematiche» del Ministero della Pubblica Istruzione (40%).

Tra esse, un posto particolare spetta alle dottrine del continuo, soprattutto a causa del ruolo centrale di quest'ultimo, quasi un ponte gettato tra la geometria, scienza del continuo per definizione, e la filosofia naturale, che nella composizione del continuo trova uno dei temi più dibattuti.

A dispetto della sua importanza, in matematica non meno che nella filosofia, si cercherebbe invano negli scritti dei geometri dall'antichità al secolo XVII una teoria soddisfacente o anche soltanto una definizione precisa del continuo, che invece è assunto come un dato immediato le cui proprietà, lungi dall'essere enunciate esplicitamente, sono piuttosto evocate e messe all'opera, quando è il caso, anche nel corso di una dimostrazione.

Il rapporto tra teorie geometriche e struttura del continuo va in senso contrario alla successione logica: la discussione delle proprietà del continuo non precede, come sarebbe logico e lecito attendersi, la formulazione e lo sviluppo delle teorie geometriche delle quali esso costituisce per così dire la materia. Al contrario, il continuo è piuttosto un risultato finale, un sottoprodotto, della geometria; un risultato peraltro che non è quasi mai esplicito, e che è piuttosto suggerito che enunciato, meno che mai dimostrato.

In altre parole, quella del continuo non è una scienza, una teoria, sulla quale si possa fondare la geometria; ma piuttosto un'immagine che si forma nella mente del geometra alla fine delle sue elucubrazioni; immagine costruita pezzo a pezzo mediante le proprietà che al continuo si sono attribuite nel corso delle dimostrazioni, e che vengono via via a modificare immagini precedenti.

La geometria genera immagini del continuo; e così ai cambiamenti di punti di vista in geometria corrisponderanno analoghe revisioni della nozione di continuità, in modo che i periodi di grande attività creatrice come il XVII secolo, sono anche caratterizzati da una forte instabilità fondazionale; periodi in cui nuove immagini del continuo sono create, modificate, e infine rimpiazzate da altre immagini, non più fondate queste ultime, o meno arbitrarie, di quelle che le hanno precedute.

Scopo di questa mia relazione è di portare alla luce alcune di queste teorie sommerse, e di ripercorrerne lo sviluppo nel secolo XVII, in particolare in relazione all'opera matematica di Leibniz. Senza peraltro dimenticare che se i fatti e le scoperte che in questo grande secolo hanno cambiato il volto della geometria – la geometria analitica, il calcolo – sono ben noti e sotto gli occhi di tutti, le teorie del continuo che ad esse soggiacciono sono riposte e talora contraddittorie; di più, esse non trovano che di rado un'enunciazione esplicita, ma devono essere estratte non senza pena da scritti non sempre di agevole e univoca interpretazione.

Di un tale stato di cose questo intervento, immagine di immagini, non potrà non risentire.

1. L'EREDITÀ CLASSICA

La nozione matematica di continuo che il XVII secolo riceve dall'antichità classica è quella risultante dalla teoria eudossiana delle proporzioni, quale è codificata nel quinto libro degli *Elementi* di Euclide.

Anche se applicabile ad ogni specie di grandezze, sia cioè a quelle continue che a quelle discrete (numeri), la teoria delle proporzioni è con ogni evidenza modellata sulle grandezze continue, ed in particolare su quelle geometriche (segmenti, figure piane e solide) che le aporie pitagoriche dell'incommensurabilità impedivano di trattare numericamente, associando cioè ad ogni grandezza la sua misura.

La teoria eudossiana si fonda sulla nozione di rapporto (λόγος) tra grandezze omogenee, e più ancora su quella di proporzione (ἀναλογία), o uguaglianza di rapporti, introdotta nella quinta definizione del quinto libro degli *Elementi*:

> Si dice che quattro grandezze hanno lo stesso rapporto, la prima alla seconda come la terza alla quarta, quando presi equimultipli della prima e della terza secondo qualsivoglia numero, ed equimultipli della seconda e della quarta secondo qualsivoglia numero, se il multiplo della prima è maggiore di quello della seconda, anche il multiplo della terza sarà maggiore di quello della quarta; se uguale, uguale; se minore, minore[1].

Come si vede, abbiamo una definizione complessa, solo un poco chiarita da quella successiva di rapporti disuguali[2]:

> Se poi, degli equimultipli, il multiplo della prima supererà quello della seconda, ma il multiplo della terza non sarà maggiore di quello della quarta, allora si dirà che il rapporto della prima alla seconda è maggiore di quello della terza alla quarta.

La teoria delle proporzioni non tratta esplicitamente delle grandezze in quanto tali, se non per precisare alcuni termini come multiplo e sottomultiplo. Essa, come è stato più volte osservato, è una teoria dei rapporti e non delle grandezze. Quest'ultima teoria è per così dire presupposta, e il lettore che

---

[1] EUCLIDE, *Elementi*, Libro V, Definizione 5. Mi sono discostato, qui come altrove, dalla traduzione italiana degli *Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino 1980, ed ho preferito tradurre direttamente dal testo greco.

[2] In un certo senso, quest'ultima definizione precede l'altra: la proporzionalità, ovvero l'uguaglianza dei rapporti, è una caratteristica per così dire negativa, che si dimostrerà solo escludendo successivamente che l'uno dei due rapporti sia maggiore dell'altro. Di qui trae origine il metodo di esaustione, usato per la determinazione delle aree delle figure piane e dei volumi delle solide.

voglia approfondirne le nozioni fondamentali, in particolare quella di grandezza continua, dovrà cercarle altrove.

Di opere relative al problema della continuità precedenti la sistemazione eudossiana delle proporzioni non ci è pervenuta notizia; e per averne una trattazione abbastanza esauriente dovremo rivolgerci alle opere di Aristotele. Lo stagirita è perfettamente al corrente della teoria delle proporzioni, e probabilmente modella su di essa la sua analisi del continuo. Quanto meno, la teoria aristotelica è compatibile con quella eudossiana, della quale costituisce il naturale prerequisito.

Aristotele distingue tre tipi di grandezze, a seconda dell'accoppiamento tra le loro parti. In primo luogo la grandezza discreta, le cui parti si susseguono consecutivamente senza che tra di esse vi sia alcunché di simile, pur non escludendo la possibilità che tra esse siano intercalati altri oggetti eterogenei. Così ad esempio tra due linee consecutive potremo trovare uno spazio, ma non una linea; e tra due case consecutive un prato, ma non una casa:

> Il consecutivo... è ciò che non presenta alcun intermedio dello stesso suo genere tra sé stesso e quello di cui è consecutivo (dico ad esempio, che non vi siano una linea o più linee dopo la linea, una unità o più unità dopo l'unità, ovvero una casa dopo una casa; nulla però impedisce che vi sia in mezzo qualcosa di altro genere)[3].

Tra le grandezze consecutive saranno contigue quelle le cui estremità (o meglio le estremità delle cui parti) sono in contatto; e tra queste saranno continue quelle i cui estremi coincidono:

> Contiguo è ciò che, oltre ad essere consecutivo, è anche in contatto.
> Il continuo è una determinazione del contiguo, ed io dico che c'è continuità quando i limiti di due cose, mediante i quali l'una e l'altra si toccano, diventano uno solo e il medesimo e, come dice la parola stessa, si tengono insieme. Questo però non può verificarsi quando gli estremi sono due. Tenendo conto di questa precisazione, risulta chiaro che il continuo è in quelle cose da cui per natura vien fuori qualcosa di unico in virtù del contatto[4].

In conclusione:

> continue sono le cose le cui estremità sono una sola cosa, sono in contatto quelle le cui estremità sono insieme, e consecutive quelle in mezzo a cui non c'è nulla di affine[5].

Una conseguenza di questa definizione di continuità è che una grandezza continua è sempre divisibile in parti omogenee, a loro volta ancora divisibili;

---

[3] *Phys.* V. 3.227a.
[4] *Phys.* V. 3.227a.
[5] *Phys.* VI. 1.231a.

in altre parole, un continuo non può essere composto di parti ultime indivisibili. A sostegno di questa tesi Aristotele porta due argomenti. Il primo è che

> un indivisibile non ha né estremità né qualche altra parte, né le estremità sono simultanee, perché non c'è nessuna estremità di ciò che è privo di parti[6].

Il secondo argomento riguarda il modo in cui gli indivisibili costituenti il continuo dovrebbero congiungersi tra loro. Infatti

> poiché l'indivisibile è privo di parti, necessariamente esso dovrebbe essere in contatto come intero con un intero: ma un intero che è in contatto con un intero non sarà continuo[7].

In sostanza, due indivisibili successivi, dovendo essere in contatto come un tutto, dovrebbero necessariamente coincidere e dunque si ridurrebbero ad uno solo. Al di là del suo ruolo nella teoria del continuo aristotelico, il ragionamento è interessante perché svela un tratto caratteristico e costante delle idee sulla composizione del continuo, e cioè che l'insieme degli indivisibili (sia quando questi sono considerati come componenti ultime del continuo, sia quando essi sono evocati solo per negarne l'esistenza) sia un insieme ben ordinato, nel quale ogni indivisibile segue il suo predecessore secondo l'ordine naturale[8]. Un tale presupposto è evidentemente incompatibile, come mostra Aristotele, con un continuo di indivisibili. Non resta allora che assumere la divisibilità indefinita del continuo; una conclusione che, superando le aporie pitagoriche degli irrazionali, rende il continuo aristotelico particolarmente adatto a fondare la teoria delle proporzioni. Le due costruzioni risultano così complementari l'una dell'altra, di modo che chi voglia opporsi ad una di esse si vedrà obbligato a negare anche l'altra, o almeno a recidere i legami tra le due. È quanto, per opposte ragioni, tenteranno di fare Galileo e Cavalieri.

2. Tensioni dello schema classico: Galileo e Cavalieri

Le pagine che, nella prima giornata dei *Discorsi*, Galileo dedica al problema del continuo mirano soprattutto a dimostrare la composizione atomica della materia, e dunque si oppongono direttamente alle argomentazioni aristoteli-

---

[6] *Phys.* VI. 1.213a.

[7] *Phys.* VI. 1.231b.

[8] Varrà la pena di notare come una tale assunzione soggiaccia alle interminabili discussioni sul «primo istante del moto»; come ad esempio se un grave cadente dalla quiete debba passare o meno per tutti i gradi di velocità.

2

che che ne dimostravano l'impossibilità. E dato che quest'ultima seguiva immediatamente dalla stessa definizione di grandezza continua, è in primo luogo con questa che Galileo deve confrontarsi.

Ciò non vuol dire che Galileo proponga una sua propria definizione al posto di quella di Aristotele, men che mai che egli sostituisca la teoria aristotelica del continuo con una teoria galileiana; al contrario, egli assume il continuo come un dato immediato, identificandolo di fatto con la retta geometrica. In altre parole, egli rimpiazza una teoria con un'immagine.

La linea d'attacco di Galileo si snoda lungo la distinzione aristotelica tra atto e potenza. Alla domanda se le parti del continuo siano finite o infinite, Simplicio risponde accettando ambedue i corni del dilemma: esse sono finite in atto ed infinite in potenza. Galileo rifiuta questa distinzione ed argomenta che essendo sempre divisibile, il continuo deve essere costituito di parti infinite. Queste non potranno essere *quante,* cioè avere grandezza finita, perché altrimenti darebbero luogo ad un'estensione infinita: ne segue che il continuo è composto di infinite parti *non quante,* dunque indivisibili;

> chiamateli poi in atto o in potenza, come più vi piace, ché io, Sig. Simplicio, in questo particolare mi rimetto al vostro arbitrio e giudizio[9].

In realtà tutta l'argomentazione si basa su uno slittamento semantico: dove Aristotele dice semplicemente parti, Galileo intende parti *ultime.* Una volta accettata questa interpretazione, è chiaro che le parti galileiane non potranno che essere indivisibili (perché altrimenti non sarebbero ultime) ed infinite (pena la ricaduta nei paradossi dell'incommensurabilità).

A questo punto Galileo non può esimersi dall'affrontare un altro problema: se il continuo è composto di infiniti indivisibili, come è possibile confrontare due continui tra di loro, ad esempio dire quando una linea è maggiore di un'altra? sarebbe dunque possibile paragonare due infiniti, contro quanto afferma esplicitamente la teoria delle proporzioni?

Come è noto, la risposta di Galileo è negativa: tra gli infiniti non c'è relazione d'ordine, non si può affermare che un infinito sia maggiore o minore (e nemmeno uguale) di un altro. A sostegno della sua tesi, egli porta il celebre esempio dei numeri e dei loro quadrati: da un lato ci sono più numeri che quadrati, dato che ci sono infiniti numeri che non sono dei quadrati; dall'altro essi sono uguali, poiché a ogni quadrato corrisponde la sua radice. Il paradosso che ne consegue si può superare solo con la rinuncia al confronto tra infiniti:

> Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti

---

[9] *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due Nuove Scienze. Opere di* G. Galilei, Firenze 1968, vol. VIII, p. 81.

essere tutti i numeri, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate[10].

In conclusione, Galileo afferma da una parte che il continuo si compone di indivisibili, una tale composizione essendo una condizione necessaria per la divisibilità indefinita; ma per contro nega che ciò possa avere delle conseguenze sulla teoria matematica dei rapporti, poiché gli indivisibili, essendo infiniti, non sono grandezze che hanno rapporto tra loro.

E però quando il Sig. Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti[11].

Una conseguenza di questo atteggiamento è la separazione della matematica dalla fisica: i continui sono sì composti di infinite parti indivisibili, ma ciò è irrilevante per quanto riguarda le loro proprietà matematiche (in particolare la loro misura) che traggono origine non dalla loro composizione ultima, ma solo dall'infinita divisibilità che da questa deriva.

Una posizione simmetrica, e in un certo senso opposta, è quella di Cavalieri, che pure di Galileo fu uno dei discepoli più dotati, e la cui opera principale, la *Geometria degli indivisibili*[12], mostra evidenti correlazioni e dipendenze dal pensiero galileiano.

L'idea centrale dell'opera cavalieriana è che ci si possa servire del rapporto tra gli indivisibili di due figure geometriche per dedurne il rapporto tra le figure stesse, evitando in tal modo le lungaggini del metodo classico di esaustione, senza peraltro rinunciare al rigore geometrico della teoria delle proporzioni.

Cavalieri si trova dunque ad affermare ciò che Galileo aveva negato, e cioè la possibilità di paragonare tra loro gli indivisibili di due grandezze. Per far ciò egli deve contestare, o quanto meno attenuare, il carattere infinito degli indivisibili, cosa che altrimenti li avrebbe *ipso facto* esclusi dalla classe delle

[10] *Ivi*, p. 79.

[11] *Ibidem*.

[12] *Geometria Indivisibilium Continuorum Nova quadam ratione promota*, Bologna 1635. Una seconda edizione fu pubblicata a Bologna nel 1653; una traduzione italiana, *Geometria degli Indivisibili*, a cura di L. Lombardo Radice, Torino 1966, contiene anche la traduzione dell' Esercitazione III (contro Guldino) e una scelta di lettere. Sull'opera di Cavalieri, oltre al saggio di Lombardo Radice preposto alla traduzione sopra menzionata, si veda E. Giusti, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Bologna 1980, come anche K. Andersen, *Cavalieri's Method of Indivisibles*, «Archive for History of Exact Sciences», 31 (1985), pp. 291-367.

grandezze aventi proporzione. A questo scopo Cavalieri distingue due tipi di infiniti: quelli assoluti, che non possono essere comparati tra loro, e altri, tra i quali egli annovera gli indivisibili, che pur essendo infiniti in numero, sono tuttavia finiti per altri versi, e dunque confrontabili tra loro.

> Propter quod innuendum mihi videtur, dum considero omnes lineas, vel omnia plana alicuius figurae, me non numerum ipsarum comparare, quem ignoramus, sed tantum magnitudinem, quae adaequatur spatio ab eisdem lineis occupato, cum illi congruat, & quoniam illud spatium terminis comprehenditur, ideo & eorum magnitudo est terminis eisdem comprehensa, quapropter illi potest fieri additio, vel subtractio, licet numerum eorundem ignoremus; quod sufficere dico, ut illa sint ad invicem comparabilia, alioquin neque ipsa spatia figurarum essent ad invicem comparabilia[13].

In altre parole, Cavalieri non si interessa al numero, infinito, degli indivisibili di una figura, ma alla loro totalità intesa come un oggetto unico, distinto dalla figura ma in un certo senso congruente con essa, e da questo punto di vista con quella avente in comune una proprietà di finitezza.

A questa nuova classe di grandezze – tutte le linee delle figure piane, tutti i piani di quelle solide – egli potrà allora applicare le regole della teoria delle proporzioni, e dedurre il rapporto tra figure da quello tra i loro indivisibili:

> Figurae planae habent inter se eandem rationem, quam eorum omnes lineae iuxta quamvis regulam assumptae; Et figurae solidae, quam eorum omnia plana iuxta quamvis regulam assumpta[14].

Si potranno allora evitare i laboriosi meccanismi propri del metodo d'esaustione, e calcolare direttamente la misura delle figure piane e solide, beninteso a prezzo di una certa oscurità della teoria, che esattamente nel passaggio dal rapporto tra gli indivisibili e quello delle figure relative mostra le sue debolezze. Ma non è questo che ci interessa in questa sede, quanto invece le conseguenze che la teoria cavalieriana degli indivisibili ha sulle sue idee relative alla composizione del continuo, per molti versi opposte a quelle galileiane.

Galileo aveva proposto l'immagine di un continuo frantumato, infinitamente divisibile perché infinitamente diviso; un continuo atomico del quale non si davano relazioni quantitative. Cavalieri, che esattamente tali relazioni vuole stabilire, indietreggia davanti alle implicazioni filosofiche della sua teo-

---

[13] *Geometria*, cit., libro II, p. 111.
[14] *Ivi*, p. 113.

ria, e rinuncia a vedere nei suoi indivisibili le costituenti ultime delle figure che egli voleva misurare[15].

Nei due casi il rifiuto (meglio: l'impossibilità) di intraprendere una revisione globale della teoria del continuo, sia dal punto di vista delle matematiche che da quello della filosofia, ha come conseguenza la separazione dei due concetti: il continuo fisico e quello matematico si pongono su piani differenti e non comunicanti.

3. Il continuo algebrico: Viète e Descartes

Le idee di Galileo e di Cavalieri, pur con la loro carica innovativa, si situano ancora in un universo classico, ed hanno come referenti naturali le teorie del continuo di Eudosso e di Aristotele ed il pensiero geometrico di Euclide e di Archimede.

C'è d'altra parte una diversa corrente del pensiero matematico, che non ignora certo la rigorosa lezione della geometria, ma che a questa preferisce la generalità dell'algebra.

Contrariamente alla geometria classica, che aveva relegato il numero in una posizione nettamente subordinata ed aveva preferito trattare direttamente le grandezze e i loro rapporti, l'algebra è interamente fondata sui numeri. All'affermazione del punto di vista algebrico avevano contribuito vari fattori: una notazione posizionale che permetteva di calcolare con una velocità e una sicurezza impensabili nelle notazioni greche o latine; il legame costante con le esigenze della vita pratica e la conseguente necessità di esprimere i risultati in termini numerici; e soprattutto il potere creativo di certi segni, come ad esempio quello per denotare le radici (℞), che evocavano dei nuovi numeri – i *numeri surdi* – là ove la geometria greca aveva letto l'insufficienza del sistema numerico e l'impossibilità di rappresentare con numeri le grandezze incommensurabili. Al problema posto dall'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, problema che aveva determinato la crisi della scuola pitagorica o quanto meno di una concezione atomica della natura, l'algebra risponde con dei segni, le radici (o se si vuole con la creazione di nuove entità, i *numeri surdi*, peraltro più evocati che definiti) e con la possibilità, derivante in gran

---

[15] Si veda ad esempio la lettera di Cavalieri a Galileo, Bologna 28 giugno 1639 (*Opere di* Galilei, XVIII, p. 67): «Io non ardii di dire che il continuo fosse composto di quelli (indivisibili), ma mostrai bene che fra continui non vi era altra proportione che della congerie degl'indivisibili».

parte dall'agilità del sistema posizionale, di spingere l'approssimazione del calcolo fino a un grado arbitrario.

La gerarchia classica ne risulta capovolta, ed il numero prende la precedenza sulla grandezza: come quella degli Arabi dalla quale deriva, l'algebra dell'Occidente resta fino alla fine del XVI secolo una disciplina totalmente numerica. Anche quando il problema in questione rientra tra quelli geometrici, alle grandezze in gioco si assegna immediatamente un valore numerico, come pure numerica è la soluzione che si cerca: un numero nel senso più esteso.

Si deve a Viète l'aver sostituito a questa algebra dei numeri un'algebra delle forme; all'*algebra numerosa* un'*algebra speciosa,* nella quale gli oggetti da manipolare non sono più dati immediatamente in numeri, ma sono denotati con delle lettere, le consonanti per le quantità assegnate, le vocali per le incognite[16].

La sostituzione delle lettere ai numeri non sarebbe di per sé un progresso decisivo. Infatti se è vero che un risultato espresso in formule mostra chiaramente il ruolo delle grandezze note nella formazione dell'incognita, e talvolta indica anche il cammino percorso per giungere alla soluzione, non è meno vero che nella maggior parte dei casi la regola generale si può enunciare verbalmente, o meglio ancora si può facilmente estrapolare da un esempio numerico ben scelto.

Ben più importante è invece una conseguenza meno appariscente ma più profonda delle teorie di Viète, e precisamente la possibilità di una ricomposizione su nuove basi dell'unità tra algebra e geometria.

Come abbiamo già osservato, alla base dell'algebra *numerosa* sta il sistema numerico classico, esteso con l'introduzione dei numeri irrazionali. Così nei problemi di geometria si cominciava immediatamente con l'associare un numero ad ogni grandezza in gioco (normalmente dei segmenti), così come un numero era la soluzione, anche se talora essa veniva interpretata come lunghezza di un segmento incognito. Questa geometria numerica non aveva che deboli legami con il rigore della geometria classica, e ciò non solo né principalmente perché essa era rivolta a questioni eminentemente pratiche; anche quando i problemi affrontati avevano un carattere prevalentemente teorico, l'universo nel quale essi si muovevano era sempre quello del calcolo numeri-

---

[16] FRANCISCI VIETAE *In Artem Analitycen Isagoge*, Tours 1591. Si veda anche *Ad Logisticen Speciosam Notae Priores*, Paris 1631. Tutte le opere di Viète, o quanto meno quelle rilevanti al nostro scopo furono poi riunite da F. van Schooten nel volume, FRANCISCI VIETAE *Opera Mathematica*, Leyden 1646. Su Viète si può vedere: F. RITTER, *François Viète inventeur de l'algèbre moderne. 1540-1603*, «Révue occidentale philosophique, sociale et politique», 10 (1895), pp. 234-274 e 354-415.

co. In un certo senso, si può affermare che algebra e geometria pratica (o meglio, algebra e geometria numerica) fanno parte di una stessa tradizione, che si tratti dei problemi pratici degli abachisti o delle costruzioni evolute e sofisticate di un Bombelli.

Questa tradizione geometrica era completamente separata dall'altra, che prendeva origine e metodi dalla geometria classica. L'opera di Viète getta un ponte tra queste due anime della matematica, e realizza l'unione dei procedimenti algebrici con i metodi geometrici. Per raggiungere questo scopo, un passo obbligato è il passaggio dall'algebra numerica alla letterale; e la sostituzione dei numeri, troppo immediatamente legati da una parte alle operazioni algebriche e dall'altra alle applicazioni quotidiane, con le lettere, la cui neutralità semantica permette, a seconda dei casi, interpretazioni ora algebriche ora geometriche.

La nuova geometria si fonda sull'ambiguità di questi segni. Da una parte, è evidente, le lettere denotano dei numeri, e dunque si potrà operare su di esse con le consuete regole dell'algebra, e con altre che Viète si preoccupa di enumerare non senza una qualche pedanteria; in particolare sarà possibile sommarle tra loro, sottrarle, estrarne le radici. Da questo punto di vista, comunemente adottato dalla storiografia sull'argomento, l'algebra letterale non è che una trascrizione tachigrafica della vecchia algebra numerica.

Ma le lettere non si limitano a sostituire ed a rinviare ai numeri; esse denotano anche delle grandezze geometriche: linee, piani, solidi, ed oltre. Di più, una tale corrispondenza tra lettere e grandezze non passa per l'intermediario dei numeri, ma vale piuttosto il contrario: si spezza il legame diretto tra numero e grandezza, che aveva determinato la separazione tra geometria numerica e geometria classica, ed al suo posto si istaura un legame più complesso, fondato sul ruolo centrale dei simboli letterali.

Parallelamente, le formule dell'algebra letterale sono da una parte delle tachigrafie di analoghe formule numeriche, ma dall'altra indicano delle procedure di costruzione geometrica a partire dalle grandezze a cui le lettere si riferiscono[17]; costruzioni che talora (ma non sempre) sono eseguibili con riga e compasso, come ad esempio quella relativa all'estrazione della radice quadrata, descritta da Descartes all'inizio della sua *Géométrie*[18] (fig. 1):

> Ou, s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie lui adiouste en ligne droite FG, qui est l'unité, & divisant FH en deux parties esgales au point K, du

[17] Francisci Vietae *Supplementum Geometriae*, Tours 1593.

[18] *Oeuvres de* Descartes, publiées par C. Adam et P. Tannery, Paris 1982, vol. VI, pp. 367-485.

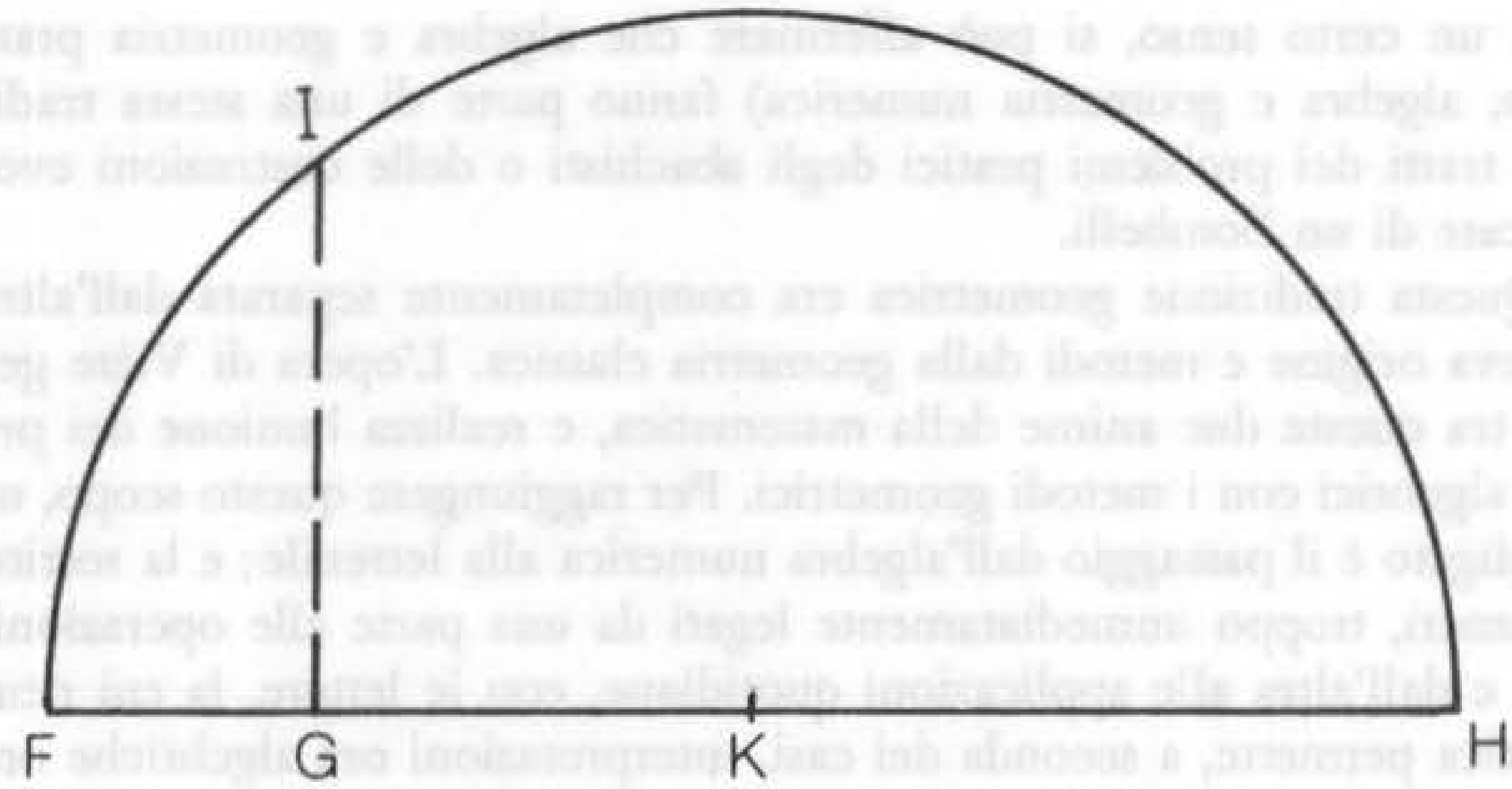

Fig. 1.

centre K ie tire le cercle FIH; puis, en enlevant du point G une ligne droite iusques a I a angles droits sur FH, c'est GI, la racine cherchée[19].

Si instaura dunque, tramite l'intermediario della simbologia letterale, una corrispondenza naturale tra le operazioni dell'algebra, che agiscono sui numeri, e le costruzioni della geometria, che si fanno a partire dai segmenti. La relazione è tale che alle costruzioni con riga e compasso corrispondono delle formule contenenti al più delle radici quadrate, anche ripetute; mentre formule più complesse, ad esempio quelle in cui entrano delle radici cubiche, rimandano a costruzioni nuove, o quanto meno al di là della geometria degli *Elementi*, che Viète riconosce nei procedimenti di inserzione o nella trisezione dell'angolo.

Le teorie di Viète e di Descartes non sono senza conseguenze sulla struttura del continuo. A differenza dell'algebra numerica, che non conosce altro continuo che i numeri, la nuova geometria algebrizzata accetta il continuo classico, rappresentato dalla retta euclidea, ma lo priva totalmente della costruzione assiomatica rigorosa ma ingombrante della teoria delle proporzioni, che sostituisce con una struttura algebrica presa a prestito dal continuo numerico.

L'immagine che ne risulta è quella di un continuo anfibio, i cui elementi sono allo stesso tempo delle grandezze e dei numeri. Questa sostanziale ambiguità si conserverà per tutto il XVII secolo ed oltre, come testimonia ad esempio la costante attenzione che in questo periodo è riservata al problema della

---

[19] *Ivi*, pp. 370-371.

costruzione delle equazioni, un problema nel quale la dualità numero-grandezza gioca un ruolo essenziale[20]. È solo al termine di una lunga marcia di più di due secoli che i due concetti si confonderanno in quello di numero reale, anche se la teminologia sarà ancora presa dalla geometria: si dirà grandezza ma si penserà numero.

La struttura del continuo che emerge dall'opera di Viète non muterà sostanzialmente per effetto dell'elaborazione cartesiana, salvo forse per una accentuazione dell'aspetto numerico dovuta all'eliminazione della legge dell'omogeneità per effetto dell'introduzione di un segmento unitario. Un tale spostamento verso il lato numerico è d'altronde un carattere costante dell'evoluzione della teoria algebrica del continuo, durante la quale si vanno perdendo i contenuti assiomatici: alle definizioni ed agli assiomi, ingombranti ma precisi, della teoria delle proporzioni, non si sostituiscono altre definizioni ed altri assiomi, ma il libero gioco delle operazioni algebriche.

Nella *Géométrie* di Descartes non c'è posto per una sola definizione, né vi si trova alcun assioma; al loro posto operazioni e descrizioni. Nel continuo deassiomatizzato e fluido che ne risulta troveranno posto le grandezze infinitesime che erano rigorosamente ed esplicitamente bandite nella geometria classica.

4. I CONTINUI LEIBNIZIANI

Con gli infinitamente piccoli siamo entrati nel dominio proprio dell'analisi leibniziana, il tema che qui particolarmente ci interessa.

Il plurale usato nel titolo di questo paragrafo anticipa una delle conclusioni che trarremo dall'esame dei passi in cui Leibniz affronta, anche indirettamente, il problema: egli non ha una teoria univoca, meno che mai una sistemazione formale, del continuo; al contrario, di volta in volta privilegia e sottolinea questo o quell'aspetto, mettendo in luce proprietà diverse a seconda delle proprie esigenze. Ne risulta una posizione se non oscillante almeno variegata, nella quale diverse immagini del continuo si susseguono senza che l'una prenda il sopravvento sulle altre, e senza che esse si fondano in una teoria unica, anche se implicita.

La nostra analisi non si limiterà ai passaggi nei quali Leibniz affronta direttamente ed esplicitamente il problema della continuità; accanto a questi

---

[20] Sulla costruzione delle equazioni si veda: H. J. M. Bos, *Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the «Construction of Equations», 1637- ca. 1750*, «Archive for History of Exact Sciences», 30 (1984), pp. 331-380.

cercheremo di rintracciare e di collegare tra loro quei testi nei quali la natura e le proprietà del continuo entrano in maniera più riposta, essendo per così dire diluite in argomentazioni di carattere matematico o fisico. In particolare, cercheremo di mettere in luce la struttura che soggiace al calcolo differenziale.

Da questo esame si vedono emergere con chiarezza non meno di tre distinte immagini del continuo, che si intrecciano negli scritti leibniziani senza che, almeno per quanto riguarda le ultime due, si possa parlare di una reale evoluzione teorica; quasi che Leibniz si riservasse il diritto di usare l'una o l'altra di esse a seconda delle circostanze. Vediamole in ordine.

a) *Il continuo con infinitesimi*

Se si eccettuano alcuni passaggi della *Theoria motus abstracti*, di cui parleremo più oltre, il primo scritto in cui Leibniz si trova a dover affrontare sistematicamente i problemi della struttura del continuo è il dialogo *Pacidius Philalethi*[21], un'opera «scripta in navi qua ex Anglia in Hollandiam trajeci. 1676 Octob.» e dedicata alla «Prima de Motu Philosophia»; un tema nel quale entrano immediatamente considerazioni concernenti la natura del continuo.

Occorrerà dire subito che Leibniz non è interessato agli aspetti quantitativi della teoria del moto, ma piuttosto ai problemi filosofici connessi col cambiamento. Il problema è classico: in quale momento di un processo continuo si produce una mutazione qualitativa? Leibniz fa una serie di esempi. Il primo riguarda il passagio dalla vita alla morte. L'ultimo istante di vita sarebbe anche il primo istante della morte? Ma allora si sarebbe contemporaneamente vivi e morti, una conclusione palesemente assurda. E ancora: in che momento da lontano un punto diventa vicino a un altro?

> si punctum A ad punctum B accedat, fiet aliquando ex non propinquo propinquum[22].

Anche qui una discontinuità qualitativa fa riscontro alla continuità quantitativa. Di carattere simile è l'esempio seguente, che ha non poche somiglianze con il paradosso zenonico della dicotomia:

> quod movetur, nondum est in loco in quo erit: non potest autem ad eum venire nisi adhuc moveatur. Ergo quidquid movetur, adhuc movebitur[23],

[21] C, pp. 594-627.
[22] *Ivi*, p. 603.
[23] *Ivi*, p. 607.

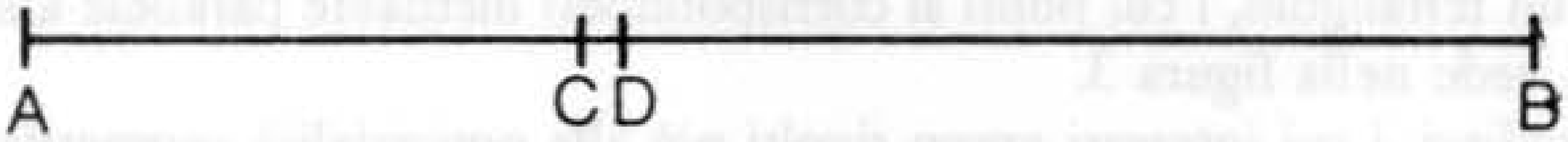

Fig. 2.

da cui l'assurda conclusione dell'eternità di un qualsiasi moto.

La soluzione leibniziana consiste nell'introdurre di nuovo la distinzione aristotelica tra continuo e contiguo, o per meglio dire nel dotare il continuo delle proprietà del contiguo aristotelico:

> Memini Aristotelem quoque contiguum a continuo ita discernere, ut *continua* sint, quorum extrema unum sunt, *contigua* quorum extrema simul sunt. Eodem modo dicemus, statum vivi mortuique tantum contigua esse, nec communia extrema habere[24].

L'atto (mentale) della separazione (ad esempio tra il tempo della vita e quello della morte o, come altrove, tra i punti vicini e quelli lontani) produce uno sdoppiamento dell'istante-punto; le due estremità che ne risultano sono una l'ultimo punto lontano, l'altra il primo punto vicino. In questo senso, ribaltando la gerarchia aristotelica che faceva procedere il continuo dal contiguo, Leibniz considera quest'ultimo come una determinazione del primo, che si produce all'atto della separazione del continuo in due parti cointegranti.

Gli estremi di queste, C e D nella figura 2, non coincidono anche se sono insieme: la considerazione della divisione ha trasformato il continuo in contiguo. In corrispondenza, il cambiamento (il moto) non è qualcosa che avviene in un istante, ma invece è uno:

> statum compositum ex ultimo momento existendi in loco aliquo, et primo momento non existendi in eodem sed in alio proximo[25].

Ma se si possono trovare due punti contigui, come C e D, non si potrebbe continuare la divisione e trovare un terzo punto immediatamente successivo a D, e poi un quarto, e così via, fino a risolvere la retta in punti, e il continuo in indivisibili?

A questa domanda Leibniz risponde in due modi. In primo luogo egli mostra che l'assunzione di un continuo di indivisibili porta a conclusioni assurde. Per questo riprende una vecchia obiezione alla teoria cavalieriana, e precisamente il paradosso di due linee rette disuguali, i cui punti si possono mettere in corrispondenza biunivoca. Tali sono ad esempio l'altezza e la diago-

---

[24] *Ivi*, p. 601.
[25] *Ivi*, p. 608.

nale di un rettangolo, i cui punti si corrispondono mediante parallele alla base, come si vede nella figura 3.

Cavalieri, i cui interessi erano rivolti più alle potenzialità geometriche del nuovo metodo che alle sue implicazioni filosofiche, aveva evitato questo paradosso facendo distinzione tra retto e obliquo transito ed escludendo quest'ultimo. Al contrario Leibniz, che ha di mira il problema della composizione del continuo, argomenta che da ciò seguirebbe l'uguaglianza del lato e della diagonale, dato che ambedue sono costituiti da uno stesso numero di punti.

Perché il suo ragionamento sia concludente, Leibniz deve anche smontare l'argomento galileiano, che escludeva la possibilità di paragonare due infiniti tra loro. A Galileo, che sosteneva che i quadrati non erano né più né meno dei numeri, e che in generale

> gli attributi di uguale, maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate[26],

Leibniz risponde che l'esempio addotto mostra solo che

> nullum omnino esse numerum omnium numerorum, talemque notionem implicare contradictionem[27].

Una volta stabilito che il continuo non si compone di indivisibili, si potrà riesaminare il problema della generazione di punti successivi per divisioni

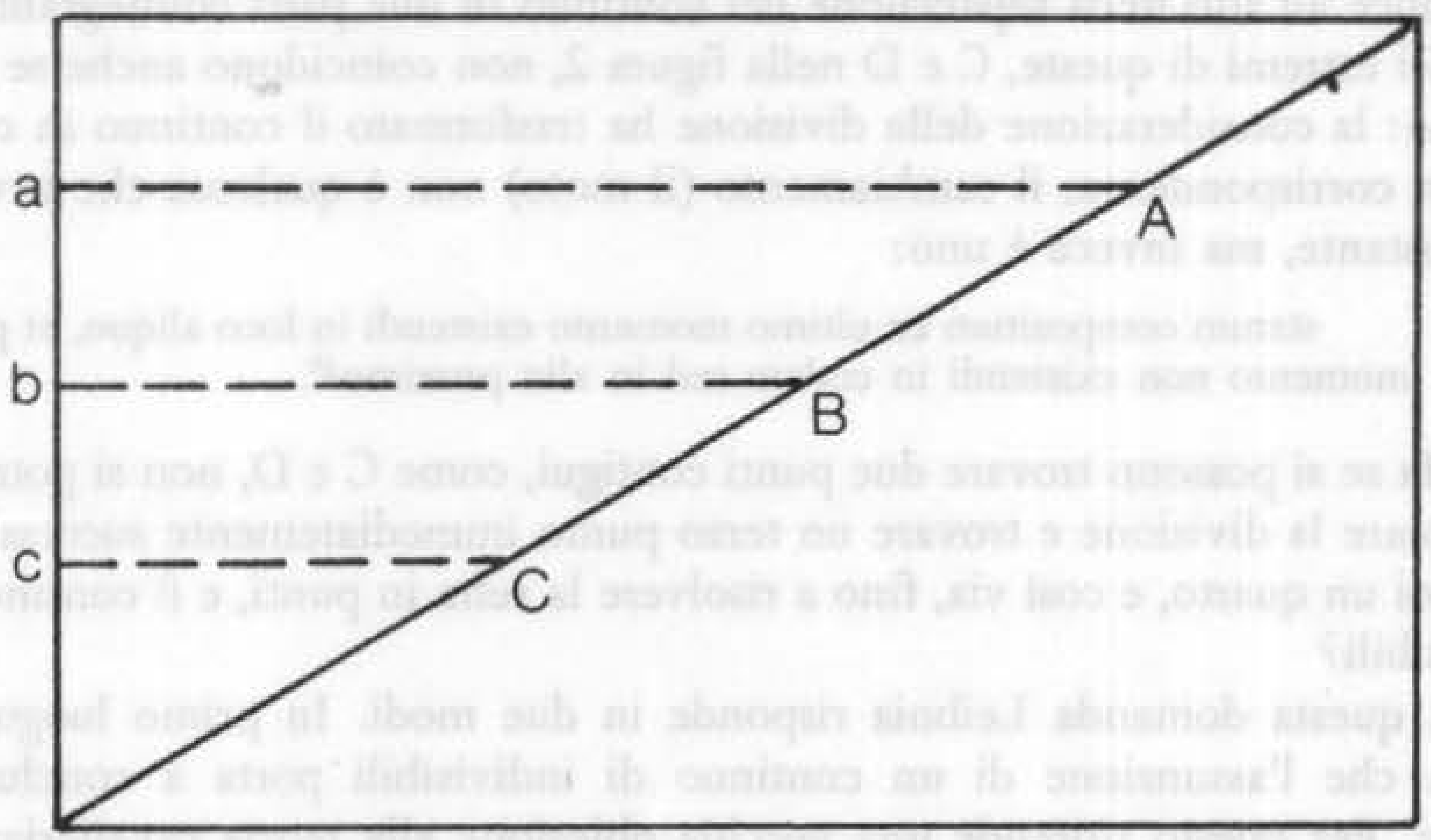

Fig. 3.

[26] *Opere di* Galilei, cit., vol. VIII, p. 79.
[27] C, p. 612.

ripetute. Se la prima divisione aveva creato i punti contigui C e D (fig. 2), Leibniz nega che sia possibile un'ulteriore divisione che individui un altro punto E successivo a D. Infatti, egli dice, i punti C e D non esistono in una linea continua, ma sono un prodotto della divisione. Perché si possa determinare un punto E immediatamente successivo a D occorrerebbe dividere la retta in AD. Ma questo non è possibile, perché

> quia lineae AC et AD aequales similes et congruae sunt, C unius divisionis et D alterius ne different quidem[28],

in altre parole, gli estremi C e D che vengono prodotti dalla divisione, benché tra loro diversi, non danno origine a due segmenti AC ed AD differenti tra loro: essi sono distinti ma non distanti. Dai tagli del continuo si generano punti infinitamente vicini.

Il contiguo aristotelico diventa dunque, nell'elaborazione leibniziana del *Pacidius Philalethi*, un *continuo con infinitesimi.* Questa immagine, sufficiente per eliminare i paradossi del cambiamento qualitativo, si rivelerà ben presto inadeguata per affrontare i problemi della geometria: sovrabbondante per quanto concerne la geometria classica, troppo povera per le esigenze del calcolo differenziale.

Dal suo abbandono non sorgerà tuttavia una nuova teoria, o anche una nuova immagine più elaborata, ed in grado di fornire le basi del calcolo come della geometria. Al suo posto, due costruzioni distinte e incomunicanti, come incomunicanti resteranno, nonostante le ripetute affermazioni in contrario, la geometria sintetica classica e il calcolo infinitesimale, la cui riconciliazione completa non avverrà che due secoli più tardi.

b) *Il continuo classico formalizzato*

Nello *Specimen Geometriae Luciferae* (c. 1695)[29], così come nel testo noto sotto il titolo *In Euclidis* ΠΡΩΤΑ (c. 1712)[30], il continuo entra soprattutto nei suoi aspetti geometrici, in relazione a due passi delicati del primo libro degli *Elementi* di Euclide. Non c'è da meravigliarsi dunque se in queste occasioni Leibniz si avvicina moltissimo ad una definizione assiomatica.

Il passaggio dello *Specimen* riguarda la costruzione di un triangolo equilatero su una base assegnata. Come è noto, Euclide ne trova il vertice mediante

---

[28] *Ivi*, p. 621.

[29] GM VII, pp. 260-298. Per la datazione degli scritti leibniziani mi sono stati di grande aiuto A. Robinet e H. Breger, che colgo l'occasione per ringraziare. Ringrazio anche M. Mugnai, che ha controllato sui manoscritti di Hannover alcuni passi dubbi dell'edizione di Gerhardt.

[30] GM V, pp. 183-219.

l'intersezione di due circonferenze di raggio uguale alla base e di centri nei due estremi di questa (fig. 4). Nel far ciò, egli assume tacitamente che le due circonferenze (ognuna delle quali ha il centro sull'altra) debbano necessariamente tagliarsi in qualche punto.

Di natura simile è l'altro passo, dedicato all'esame della definizione euclidea di diametro. A Euclide che aveva detto:

> Il diametro del cerchio è una linea retta che passa per il centro, e dell'una e dall'altra parte è terminata dalla circonferenza[31]

Leibniz obietta che in questa definizione si assume che una retta passante per il centro di un cerchio debba necessariamente incontrare la circonferenza. In ambedue i casi entra in gioco una proprietà che non deriva da nessun postulato esplicito, e che per la sua natura deve far intervenire i caratteri delle rette e delle circonferenze in quanto continui. È appunto a queste proprietà che Leibniz fa riferimento nella sua dimostrazione.

La definizione leibniziana del continuo è ancora una volta assai vicina a quella aristotelica. Dove Aristotele, pensando evidentemente ad un continuo unidimensionale, aveva detto:

> continue sono le cose le cui estremità sono una sola cosa[32],

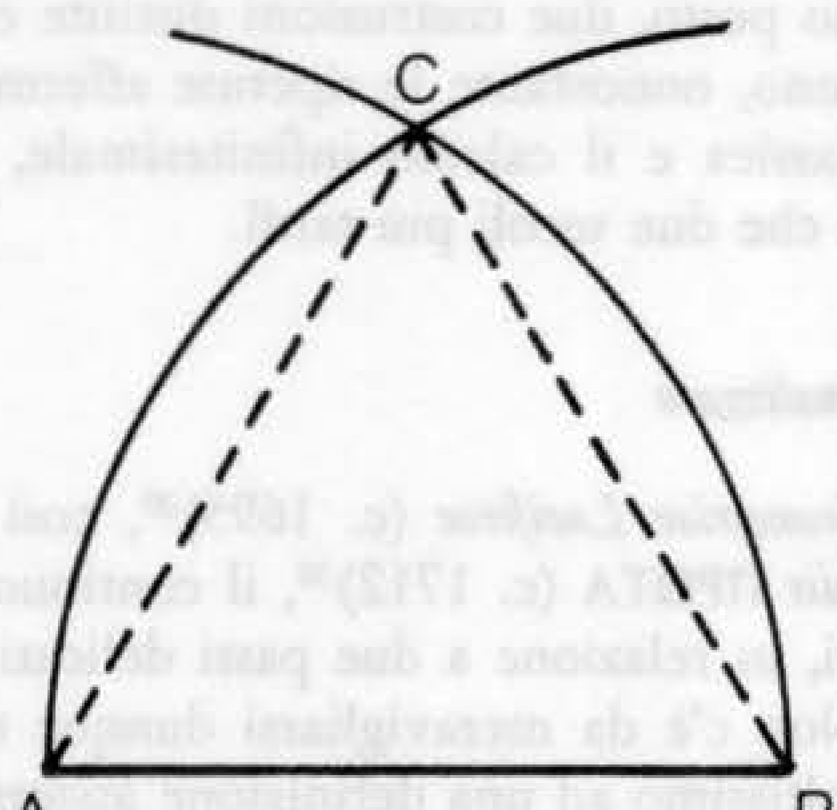

Fig. 4.

[31] *Elementi*, libro I, definizione 17.
[32] *Phys.* VI. 1.232a.

Leibniz precisa nello *Specimen*:

> Continuum est totum, cujus partes cointegrantes (seu quae simul sumtae toti coincidunt) habent aliquid commune, et quidem si non sint redundantes seu nullam partem communem habeant, sive si aggregatum magnitudinis eorum aggregato totius aequale est, tunc saltem habeant communem aliquem terminum[33].

Come le analogie, sono altresì evidenti le differenze rispetto al testo aristotelico, in particolare nel significato da attribuire al termine *parte*. Per Aristotele, una parte è il risultato di una divisione; essa può avere un'estremità in comune con un'altra parte, ma non sovrapporsi ad essa. Al contrario, Leibniz prevede esplicitamente la possibilità di una tale sovrapposizione, ed anzi sembra insinuare che questo è il caso più usuale. In ogni caso, la nozione leibniziana di parte sembra molta vicina, pur con tutte le cautele che sono necessarie in questo tipo di traduzioni, alla moderna nozione di sottoinsieme.

Più tradizionale è invece la definizione del continuo che troviamo nei ΠΡΩΤΑ, dove si esclude esplicitamente la possibilità di sovrapposizione:

> Porro ad continuum duo requiruntur, unum ut duae quaevis ejus partes totum aequantes habeant aliquid commune, quod adeo pars non est; alterum ut in continuo sint partes extra partes, ut vulgo loquuntur, id est ut duae ejus partes assumi possint (sed non aequantes), quibus nihil insit commune, ne minimum quidem[34].

In realtà più che a un cambiamento di punto di vista la differenza tra le definizioni risponde piuttosto a ragioni di esposizione. Infatti, mentre nello *Specimen* Leibniz si interessa precipuamente alla dimostrazione euclidea, nei ΠΡΩΤΑ egli si preoccupa di sistemare logicamente le definizioni di Euclide, e dunque dà una definizione di continuo che più si presta ad introdurre l'importante nozione di sezione, che egli definisce subito dopo come l'intersezione delle due parti. Analogamente, la seconda proprietà del continuo (in termini moderni che in esso esistano parti disgiunte) gli serve per escludere gli angoli.

Avendo così definito il continuo, Leibniz può colmare la lacuna nella dimostrazione euclidea. Ed infatti egli prosegue (fig. 5):

> Et proinde si ab uno transeundum sit in aliud continue, non vero per saltum, necesse est ut transeatur per terminum illud communem, unde demonstratur, quod Euclides tacite sine demonstratione assumsit in prima primi, duos circulos ejusdem plani, quorum unus sit partim intra partim extra alterum, sese alicubi secare, ut si circulus unus describatur radio AC, alter radio

[33] GM VII, p. 284.
[34] GM V, p. 184.

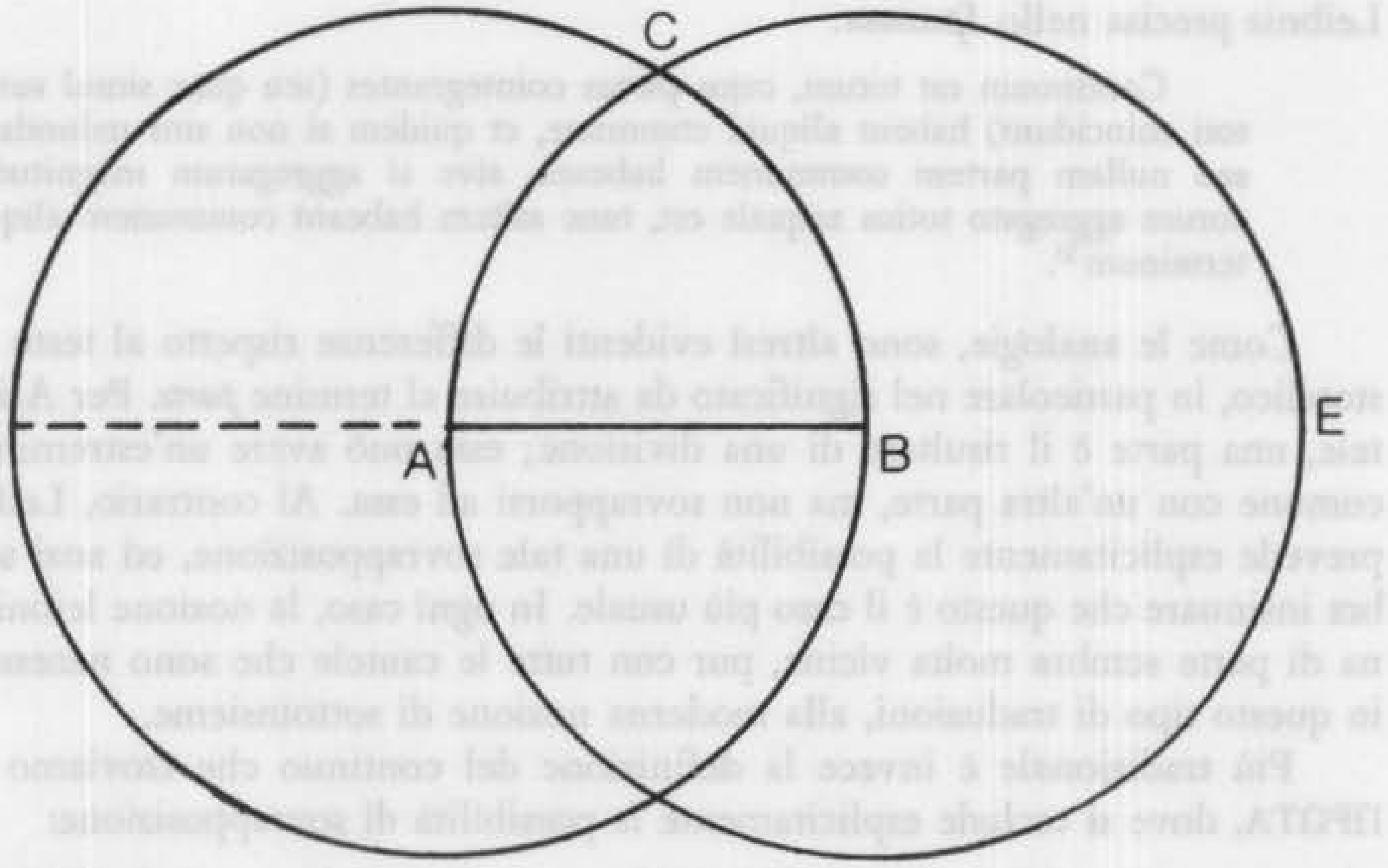

Fig. 5.

> BC, sintque AC et BC aequales inter se et ipsi AB, manifestum est aliquid B quod in una circumferentia DCB est, cadere intra circulum alterum ACE, quia B est ejus centrum, sed vicissim patet D, ubi recta BA producta circumferentiae DCB occurrit, cadere extra circulum ACE, itaque circumferentia DCB, cum sit continua et partim reperiatur intra circulum ACE partim extra, ejus circumferentiam alicubi secabit[35].

Una generalizzazione è immediata:

> Et in genere, si linea aliqua continua sit in aliqua superficie, sitque partim intra partim extra ejus superficiei partem, hujus partis peripheria alicubi secabit. Et si superficies aliqua continua sit partim intra solidum aliquod partim extra, necessario ambitum solidi alicubi secabit. Quodsi sit extra tantum, vel intra tantum, et tamen peripheriae vel termino alterius occurrat, tunc eum dicitur tangere, hoc est intersectiones inter se coincidunt[36].

A questo punto, come è suo solito, Leibniz cerca di trasformare la sua definizione in un calcolo (fig. 6):

> Hoc autem aliquo calculi genere etiam exprimere possumus, ut si alicujus extensi pars sit Ÿ et unumquodque punctum cadens in hanc partem Ÿ vocetur

---

[35] GM VII, p. 284.
[36] *Ibidem*.

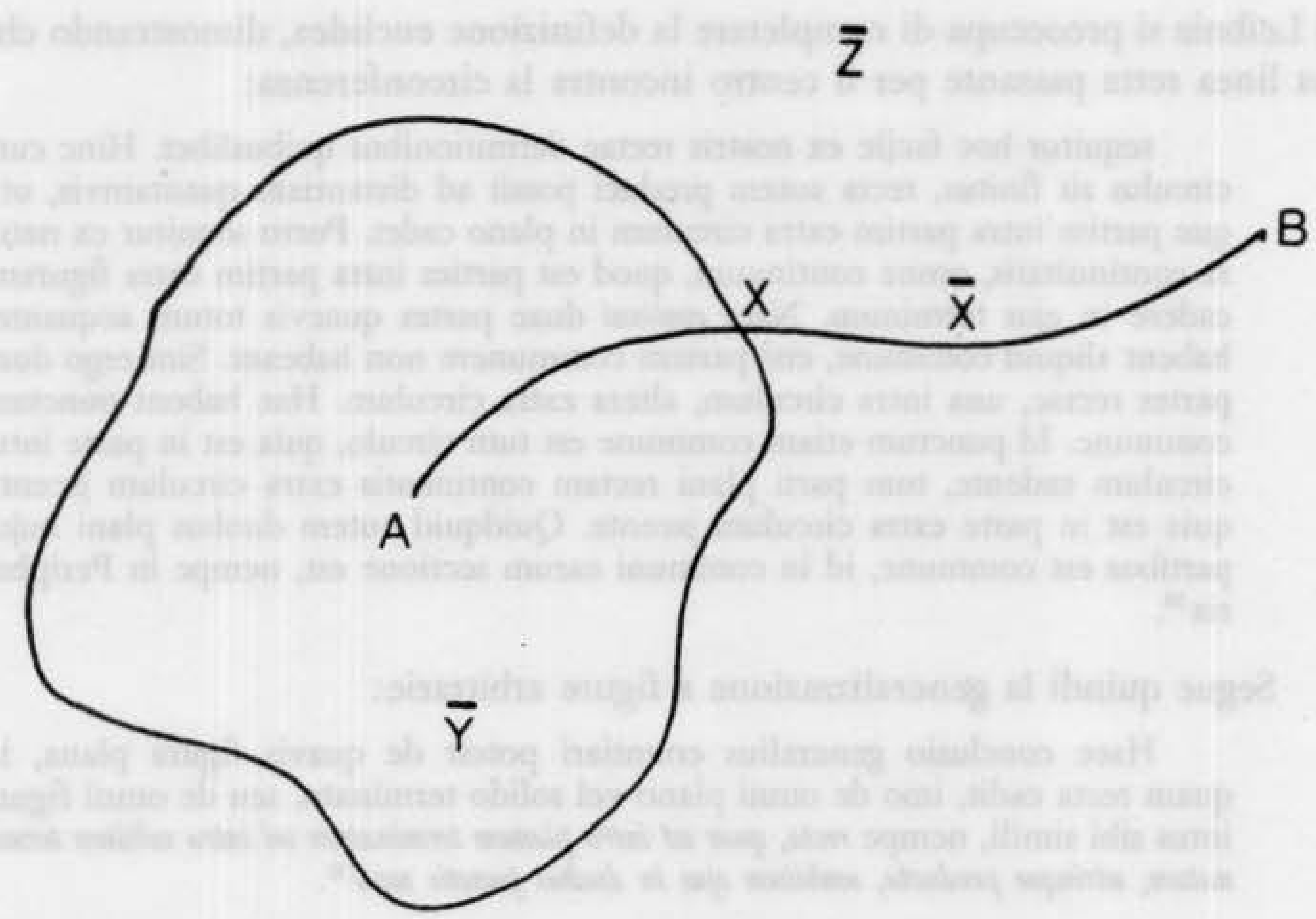

Fig. 6.

uno generali nomine Y, omne autem punctum ejusdem extensi cadens extra eam partem vocetur uno generali nomine Z, adeoque totum extensum extra illam partem $\bar{Y}$ sumtum vocetur $\bar{Z}$, patet puncta in ambitum partis $\bar{Y}$ cadentia esse communia ipsi $\bar{Y}$ et ipsi $\bar{Z}$ seu partim posse appellari Y et Z, hoc est dici posse aliqua Y esse Z et aliqua Z esse Y. Totum autem extensum utique ex ipsis $\bar{Y}$ et $\bar{Z}$ simul componitur seu est $\bar{Y} \oplus \bar{Z}$, ut omne ejus punctum sit vel Y vel Z, licet aliqua sint Y et Z. Ponamur jam aliud dari extensum novum, verbi gratia AXB existens in extenso proposito $\bar{Y} + \bar{Z}$, et extensum hoc novum vocemus generaliter $\bar{X}$, ita ut quodlibet ejus punctum sit X, patet ante omnia omne X esse vel Y vel Z. Si vero ex datis constet aliquod X esse Y (verbi gratia A quod cadit intra $\bar{Y}$) et rursus aliquod X esse Z (verbi gratia B quod cadit extra $\bar{Y}$ adeoque in $\bar{Z}$), sequitur aliquod X esse simul et Y et Z.... Ut igitur consecutionem in pauca contrahamus: Si sint continua tria $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ et omne X sit vel Y vel Z, et quoddam X sit Y, et quoddam X sit Z, tunc quoddam X erit simul Y et Z. Unde etiam colligitur, $\bar{X} \oplus \bar{Y}$ novum aliquod continuum componere, quia quoddam Y est Z seu quoddam Z est Y[37].

Lungo le stesse linee si snoda l'argomentazione dei ΠΡΩΤΑ. In primo luo-

[37] GM VII, pp. 284-285. Gerhardt ha «quoddam Y sit Z» al posto di «quoddam X sit Z».

go Leibniz si preoccupa di completare la definizione euclidea, dimostrando che una linea retta passante per il centro incontra la circonferenza:

> sequitur hoc facile ex nostris rectae definitionibus quibuslibet. Hinc cum circulus sit finitus, recta autem produci possit ad distantiam quantamvis, utique partim intra partim extra circulum in plano cadet. Porro sequitur ex natura continuitatis, omne continuum, quod est partim intra partim extra figuram, cadere in ejus terminum. Nam *continui* duae partes quaevis totum aequantes habent aliquid commune, etsi partem communem non habeant. Sint ergo duae partes rectae, una intra circulum, altera extra circulum. Hae habent punctum commune. Id punctum etiam commune est tum circulo, quia est in parte intra circulum cadente, tum parti plani rectam continentis extra circulum jacenti, quia est in parte extra circulum jacente. Quidquid autem duobus plani hujus partibus est commune, id in communi earum sectione est, nempe in Peripheria[38].

Segue quindi la generalizzazione a figure arbitrarie:

> Haec conclusio generalius enuntiari potest de quavis figura plana, in quam recta cadit, imo de omni plano vel solido terminato, seu de omni figura intus sibi simili, nempe ***recta, quae est intra planum terminatum vel intra solidum terminatum, utrinque producta, ambitum ejus in duobus punctis secat***[39].

Infine la riduzione a calcolo (fig. 7):

> Operae autem pretio erit, hanc demonstrationem *Calculo situs* nonnihil accomodare, ut ei paulatim assuescamus. Planum per peripheriam circuli dividitur in duas partes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$, unam X circulum, alteram Y extra circulum. Peripheria autem erit $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ seu locus omnium punctorum, quae simul sunt X et Y. Recta autem ab uno termino producta sit $\bar{Z}$, ejus una pars, quae intra circulum, est $\bar{Z}$ et $\bar{X}$, quae extra circulum, est $\bar{Z}$ et $\bar{Y}$. Punctum ergo utrique commune (ob natura continuitatis) est Z et X et Y; ergo est X et Y; ergo est in $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ seu in peripheria[40].

Alla luce delle dimostrazioni leibniziane possiamo riprendere in esame la definizione di continuo, in modo da eliminare quelle che ad un lettore moderno possono sembrare delle evidenti incongruenze.

Prese alla lettera infatti, ambedue le definizioni di continuo sono ovviamente prive di senso, almeno se si interpreta il termine leibniziano *parte* nel senso di sottoinsieme arbitrario. Bisogna invece intendere qui un insieme *chiuso,* come ha anche osservato H. Breger in un suo recente scritto:

> in der Terminologie der modernen Mathematik impliziert diese Defini-

---

[38] GM V, p. 196.

[39] GM V, pp. 196-197.

[40] GM V, p. 197.Qui mi discosto dal testo a stampa che ha «Y intra circulum», invece che «Y extra circulum» come sul manoscritto.

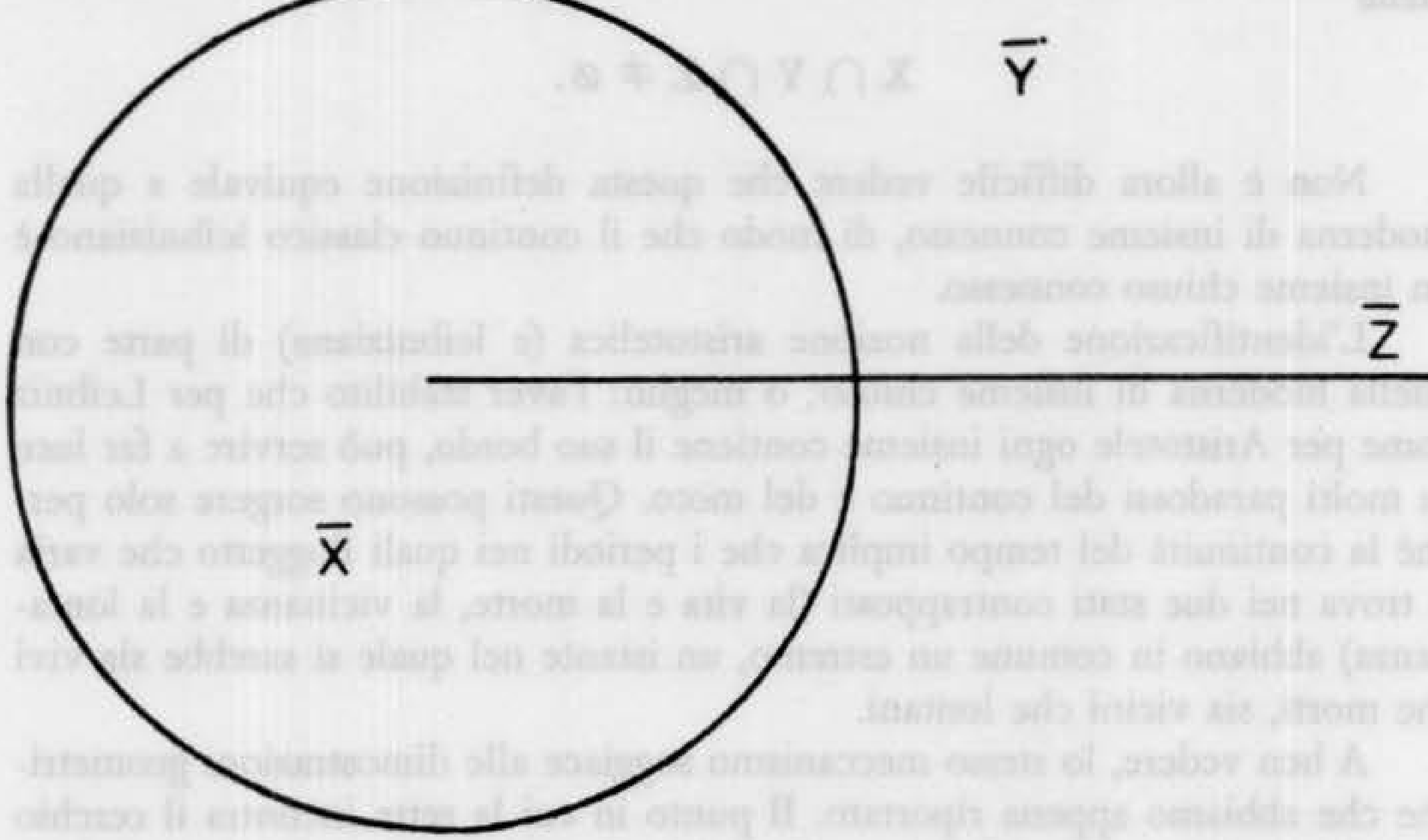

Fig. 7.

tion, daß für Aristoteles und Leibniz... ein Kontinuum stets eine abgeschlossene Menge ist[41].

In realtà si può e si deve dire di più: non solo il continuo, ma ogni parte di esso (e più in generale ogni figura geometrica) si deve considerare come comprendente il suo contorno; in termini moderni, la geometria leibniziana è una geometria di insiemi chiusi. Peraltro questa non è una peculiarità del pensiero leibniziano: una parte contiene sempre le sue estremità, ed è solo in questo senso che si possono interpretare le definizioni aristoteliche del continuo e del contiguo, come pure le discussioni che a tali definizioni si riallacciano.

Una volta precisato questo punto, possiamo tradurre la definizione leibniziana in linguaggio moderno senza pericolo di operare forzature altro che terminologiche:

Un insieme chiuso X è un continuo se, presi comunque due insiemi chiusi Y e Z tali che

$$X \subset Y \cup Z \,;\, X \cap Y \neq \emptyset \,;\, X \cap Z \neq \emptyset,$$

[41] H. Breger, *Weyl, Leibniz und das Kontinuum*, IV Internationaler Leibniz-Kongress, Vorträge. Hannover 1983, pp. 77-84. Una versione più estesa è: *Leibniz, Weyl und das Kontinuum*, «Studia Leibnitiana Supplementa», 26 (1986), pp. 316-330.

risulta

$$X \cap Y \cap Z \neq \emptyset.$$

Non è allora difficile vedere che questa definizione equivale a quella moderna di insieme connesso, di modo che il continuo classico leibniziano è un insieme chiuso connesso.

L'identificazione della nozione aristotelica (e leibniziana) di parte con quella moderna di insieme chiuso; o meglio: l'aver stabilito che per Leibniz come per Aristotele ogni insieme contiene il suo bordo, può servire a far luce su molti paradossi del continuo e del moto. Questi possono sorgere solo perché la continuità del tempo implica che i periodi nei quali l'oggetto che varia si trova nei due stati contrapposti (la vita e la morte, la vicinanza e la lontananza) abbiano in comune un estremo, un istante nel quale si sarebbe sia vivi che morti, sia vicini che lontani.

A ben vedere, lo stesso meccanismo soggiace alle dimostrazioni geometriche che abbiamo appena riportato. Il punto in cui la retta incontra il cerchio appartiene sia a questo che alla regione del piano fuori di esso. In questo caso però Leibniz, e noi con lui, non coglie una contraddizione: quando si passa dall'incompatibilità dei contrari ontologici vita-morte, vicino-lontano, all'opposizione moderata dei termini geometrici interno-esterno, l'identità degli estremi che nel primo caso era fonte di paradosso, diventa nel secondo la soluzione del problema.

Di conseguenza, non è più necessario introdurre quello sdoppiamento dell'istante-punto che aveva permesso il superamento delle aporie del moto: nel continuo formalizzato di Leibniz non c'è posto né necessità di punti infinitamente vicini.

c) *Il continuo iperdenso*

Superfluo nella geometria classica, il continuo con infinitesimi non è ancora sufficiente per le necessità del calcolo differenziale.

I punti consecutivi del continuo con infinitesimi non si confondevano in uno solo, anche se si trovavano nello stesso luogo. Il segmento CD da essi generato (fig. 2) non era di conseguenza nullo, ma più piccolo di ogni grandezza assegnabile; in breve: un infinitesimo, la cui grandezza non aggiungeva nulla a quella delle rette finite AC ed AD, che restano «aequales, similes et congruae». Questa proprietà degli infinitesimi sarà una caratteristica del calcolo leibniziano, e la troveremo enunciata più volte, come ad esempio dal marchese de l'Hôpital, nella cui *Analyse des Infiniment Petits* diverrà un assioma:

On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la méme chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse étre considérée comme demeurant la même[42],

e dallo stesso Leibniz:

aequalia esse puto, non tantum quorum differentia est omnino nulla, sed et quorum differentia est incomparabiliter parva; et licet ea Nihil omnino dici non debeat, non tamen est quantitas comparabilis cum ipsis, quorum est differentia. Quemadmodum si lineae punctum alterius lineae addas, vel superficiei lineam, quantitatem non auges. Idem est si lineam quidem lineae addas, sed incomparabiliter minorem. Nec ulla constructione tale augmentum exhiberi potest. Scilicet eas tantum homogeneas quantitates comparabiles esse, cum Euclide lib. 5 defin. 5 censeo, quarum una numero, sed finito, multiplicata, alteram superare potest. Et quae tali quantitate non differunt, aequalia esse statuo, quod etiam Archimedes sumsit, aliique post ipsum omnes[43].

Il richiamo ai classici, Euclide ed Archimede, è sostanzialmente retorico: in realtà l'introduzione di quantità infinitesime non si compie sul continuo classico, ma su quello della geometria algebrica di Viète e Descartes. È in questo continuo numerico, che già i geometri francesi avevano ampliato con le radici (i *numeri surdi*), che si vanno stipando via via le nuove grandezze. Si procede così per successivi ampliamenti dagli interi positivi a quelli negativi, alle frazioni, ai numeri irrazionali:

cum subtractio irrita est, numeri prodeunt negativi; cum divisio irrita est, numeri fracti; cum extractio irrita est, numeri surdi. Idemque est de quantitatibus, quod de numeris. Haec succedanea vere satisfaciunt et exacte, exhiberique etiam in natura actu ipso possunt[44].

A queste grandezze ormai classiche, Leibniz ne aggiunge altre:

Dantur et quantitates transcendentes, ipsis ut ita dicam surdis surdiores, quae tamen in Geometria et natura actu ipso exhibentur.

Dantur et quantitates inassignabiles, eaeque vel infinitae, vel infinite parvae seu infinitesimae, eaeque rursus varii gradus. Quae etsi per se non prosint, prosunt tamen non raro ad quantitates assignabiles per inassignabilium ambages inveniendas; et omnino in omni transcendentia intervenit aliqua consideratio infiniti aut infinitesimi[45].

---

[42] G.-J. L'Hôpital, *Analyse des Infiniment Petits* (seconde édition), Paris 1715, pp. 2-3.

[43] *Responsio ad nonnullas difficultates a dn. Bernardo Nieuwentijt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas*, «Acta Eruditorum», 1695; GM V, p. 322.

[44] *Mathesis Universalis*, GM VII, p. 68.

[45] *Ibidem*.

Il legame tra le nuove grandezze infinitesime e quelle algebriche della geometria cartesiana è qui immediato: nel continuo senza fondamenti assiomatici di Viète e di Descartes si insinuano senza traumi le grandezze trascendenti e quelle infinitesime. Se le prime lo rendono completo, le ultime ne fanno un continuo iperdenso, in cui ogni punto-numero è circondato da innumerevoli altri infinitamente vicini.

Tali sono i due estremi generati dalla sezione del continuo; e da essi possiamo partire per esaminare l'immagine geometrica del terzo continuo leibniziano.

La sezione è alla base dell'idea della retta tangente a una curva. Infatti il punto per il quale si vuole tirare la tangente determina una sezione della curva, e si sdoppia in due punti infinitamente vicini tra loro. La tangente non sarà dunque che la retta che congiunge questi due punti, poiché

> tangentem invenire esse rectam ducere, quae duo curvae puncta distantiam infinite parvam habentia jungat[46].

Questo modello non è ancora sufficiente per le esigenze del calcolo, e verrà abbandonato quando gli sviluppi di questo richiederanno costruzioni più complesse. In effetti, se è vero che la struttura del continuo che ne risulta ammette la possibilità di grandezze infinitesime, è anche vero che esse entrano in maniera troppo uniforme per essere utilizzabili. Non sono necessarie infatti solo delle grandezze infinitamente piccole; occorre anche e soprattutto che esse siano paragonabili tra loro in modo che, come dice Leibniz, uno zero sia più grande di un altro. Inoltre si deve poter operare su di esse con le regole formali delle operazioni aritmetiche: sommarle, sottrarle, moltiplicarle tra loro e con altre grandezze finite.

Di conseguenza, ogni punto ha bisogno non di un solo altro punto che gli sia infinitamente vicino, ma di un'infinità di tali oggetti, situati a delle distanze più o meno grandi, anche se tutte infinitamente piccole: il microcosmo deve somigliare al macrocosmo.

Si viene così a creare una struttura iperdensa del continuo, nella quale ogni punto è circondato da una nuvola di altri punti distinti ma infinitamente vicini l'un l'altro (una *monade*, per usare il termine un po' fuorviante ma certamente espressivo di Robinson)[47], che determina la struttura differenziale della retta. In questa nuvola si svolgono tutte le operazioni del nuovo calcolo infinitesimale; è solo alla fine di queste che, eliminati gli infinitesimi, essa si solidi-

---

[46] *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, «Acta Eruditorum», Leipzig 1684. GM V, p. 223.
[47] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, Amsterdam 1966, p. 57.

fica di nuovo in un punto euclideo, consentendo di esprimere i risultati in termini finiti.

Il punto (o se si preferisce la *monade*) del calcolo infinitesimale si rivela in tal modo un'entità complessa: ciò che è privo di grandezza non è necessariamente privo di struttura[48].

Tracce di questo continuo iperdenso sono presenti anche prima dell'invenzione del calcolo; ad esempio nella definizione di punto che Leibniz dà nella *Theoria motus abstracti* (1673):

> Punctum non est, cujus pars nulla est[49], nec cujus partes non considerantur[50]; sed cujus extensio nulla est, seu cujus partes sunt indistantes, cujus magnitudo est inconsiderabilis, inassignabilis, minor quam quae ratione, nisi infinita ad aliam sensibilem exponi possit, minor quam quae dari potest[51].

E più oltre:

> linea qualibet, ducta a centro ad circumferentiam, circulo commensurabilis, seu circumductione sua circuli genitrix, est sector minimus perpetuo crescens, sed intra inextensionem[52].

In questo punto strutturato, ma al di quà dell'estensione, si trovano i differenziali del calcolo leibniziano, o meglio i valori successivi delle variabili.

La nozione di variabile che emerge dal calcolo di Leibniz è stata descritta da H. Bos in un suo importante lavoro[53], al quale rimandiamo per i dettagli, limitandoci a riassumerne le conclusioni che toccano più da vicino il nostro tema. Per Leibniz e per i suoi seguaci («the practitioners of the Leibnitian calculus», per usare un'espressione di Bos) una variabile assume una successione arbitraria ma assegnata di valori, le differenze tra i quali sono infinitesime:

---

[48] Mi pare peraltro preferibile, non ultimo per non creare malintesi, evitare l'uso del termine *monade* per denotare l'insieme dei punti infinitamente vicini ad un punto dato. In mancanza di meglio, mi servirò di termini come *punto strutturato*, e simili, senza con ciò sostenere la tesi che le idee giovanili di Leibniz di un punto dotato di parti (vedi i passi riportati qui sotto) si conservino inalterate coll'evolversi del pensiero leibniziano. D'altra parte, quello che qui mi interessa è il continuo nel suo insieme, e non la nozione di punto; in questo rispetto le due alternative sono del tutto equivalenti.

[49] *Elementi*, libro I, definizione 1: «Il punto è ciò che non ha parti».

[50] *The English Works of* TH. HOBBES, edited by W. Molesworth, London 1845, vol. VII, p. 201: «A point is that body whose quantity is not considered». Si veda anche C. MILLIET DECHALES, *Cursus, seu Mundus Mathematicus*, Lyon 1674, vol. III, p. 765: «Indivisibile, seu punctum Mathematicum, illud est cuius pars nulla, nempe quod ita concipitur, ut in eo pars una ab alia non distinguatur».

[51] GM VI, p. 68.

[52] GM VI, p. 70.

[53] H. J. M. BOS, *Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivatives in the Leibnitian Calculus*, «Archive for History of Exact Sciences», 14 (1974).

queste differenze, o differenziali, sono anch'essi una variabile della quale si possono prendere le differenze (che così saranno le differenze seconde della prima variabile), e così via.

> The sequences of ordinates, abscissas etc. now consist of infinitely many terms. Successive terms of these sequences have infinitely small differences... In the practice of Leibnitian calculus, the variable is conceived as taking only the values of the terms of the sequence. Thus the conception of a variable and the conception of a sequence of infinitely close values of that variable, come to coincide[54].

A questa analisi aggiungeremo solo una considerazione: gli infiniti valori della successione che finisce per coincidere con la variabile, si situano tutti *intra inextensionem*. I valori della variabile, le differenze, le differenze delle differenze, e via sminuzzando, si muovono sempre all'interno del punto strutturato ma inesteso del continuo iperdenso leibniziano. E se il linguaggio e le idee del calcolo differenziale possono essere ricavati come un'estrapolazione dalla teoria delle successioni numeriche, dunque finite, è perché il macrocosmo delle grandezze finite e il microcosmo degli infinitesimi sono essenzialmente isomorfi. Ogni punto ha una nuvola di parti distinte ma non distanti, che rispecchiano quelle del continuo macroscopico; è questa struttura locale che contiene le proprietà differenziali del continuo[55].

Ma se il continuo macroscopico si ritrova in quello microscopico, allora quest'ultimo deve avere anch'esso una struttura iperdensa, nella quale ogni punto ha una nuvola locale di infinitesimi. Si potrebbero così introdurre delle strutture differenziali di secondo ordine, poi di terzo e così di seguito, corrispondenti agli ordini di infinitesimo definiti da Leibniz.

Ma qui l'immaginazione è temperata dalla reticenza della ragione, timorosa di perdersi in queste regioni ramificate. Abbandonerò dunque questa strada, e concluderò questo intervento con alcune considerazioni sull'integrazione.

Come è noto, l'integrale (o la somma, come la chiamava Leibniz) ha origine nelle ricerche di Cavalieri sulla quadratura delle figure geometriche. Per Leibniz, tali quadrature non sarebbero che la somma di un'infinità di quantità infinitesime, corrispondenti alle aree elementari dei rettangoli di base dx e di altezza y (fig. 8).

---

[54] *Ivi*, p. 16.

[55] Si veda Bos, *op. cit.*, p. 13: «The Leibnitian calculus has its origin in the theory of number sequences and the difference sequences and sum sequences of such sequences. He applied it to the study of curves by considering sequences of ordinates, abscissas etc., and supposing the differences between the terms of these sequences infinitely small».

Considerata dal punto di vista del nostro modello di continuo, tale operazione è priva di senso: sommando delle quantità infinitamente piccole non si uscirebbe mai dalla struttura locale del punto, e dunque non si arriverebbe mai ad ottenere l'area che si voleva calcolare.

Il fatto che Leibniz e i suoi seguaci pensino all'area in termini di somma, in apparente contraddizione con l'immagine del continuo che abbiamo delineata, ci dice che non si devono prendere queste immagini per quello che non sono e non possono essere, e cioè per delle definizioni o degli assiomi.

Ciò detto, non bisogna neanche cadere nell'eccesso opposto, e considerarle alla stregua di semplici figure retoriche. Infatti, se è vero che Leibniz considera l'integrale come una somma, è altrettanto vero che, contrariamente a quanto faceva Fermat[56], e implicitamente Cavalieri, tali somme non vengono mai eseguite. Quando dalla manipolazione e dalla trasformazione degli integrali si passa al loro calcolo effettivo, si procede considerando questa «somma» come già fatta e studiandone le proprietà locali. E poiché differenziando si ritrova la funzione che si voleva sommare, l'integrale si otterrà non già tramite un calcolo diretto sovente impossibile, ma invertendo l'operazione di derivazione. Poco più avanti, esso sarà addirittura definito come l'inverso dell'opera-

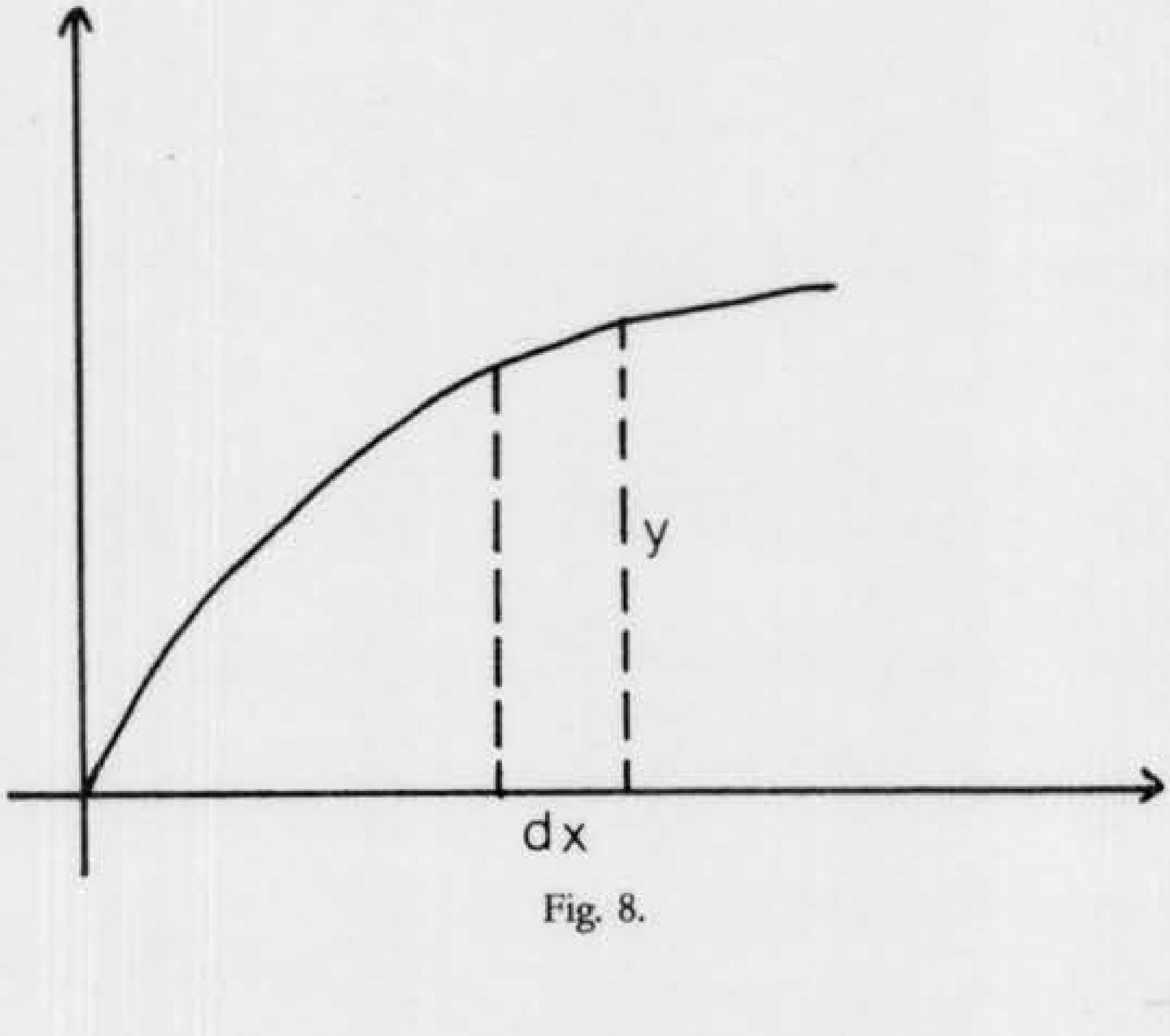

Fig. 8.

[56] P. FERMAT, *De Aequationum localium Transmutatione et Emendatione*, in *Oeuvres de Fermat*, publiées par P. Tannery et Ch. Henry, Paris 1891-1922, vol. I, pp. 255-288.

zione di differenziazione, perdendo così anche i legami formali con le somme di infiniti termini[57].

L'integrazione si riduce dunque alla differenziazione; la struttura globale alla locale. Come Leibniz aveva detto altrove a proposito delle notazioni, anche nella scelta delle immagini la preferenza va a quella che è più aderente alla vera natura delle cose. Una natura che queste stesse immagini hanno contribuito a creare.

---

[57] Si veda ad esempio quanto dice JOH. BERNOULLI nelle sue ***Lectiones Mathematicae, de methodo Integralium***, in ***Opera Omnia***, Lausanne - Genève 1742, vol. III, p. 387: «Vidimus in praecedentibus quomodo quantitates ***Differentiales*** inveniendae sunt: nunc vice versa quomodo differentialium ***Integrales***, id est, eae quantitates quarum sunt differentiales, invenitur, mostrabimus».