

HEINZ-JÜRGEN HEß  
(Leibniz-Archiv, Hannover)

## METHODOLOGISCHE EINHEIT UND CHARAKTERISTISCHE VIELHEIT IN LEIBNIZ' MATHEMATISCHEM SCHAFFEN

### *Mathematische Gegenstände und mathematische Methoden*

Die zentralen Wesenszüge der Mathematik haben historisch betrachtet mehrere entscheidende Wandlungen erfahren. War die μαθηματικὴ τέχνη zunächst eine praktische Disziplin des konkreten Messens und Rechnens, so wurde sie in griechischer Zeit zu einer beweisenden Wissenschaft fortentwickelt. Diese prototypische Bedeutung behielt sie bis in die frühe Neuzeit hinein, wo 'more geometrico' gleichbedeutend für logisch zwingend und allgemeingültig stand. Im 18. Jahrhundert bildete die Mathematik in Verbindung mit der theoretischen Physik den Garanten für die Anwendbarkeit menschlicher Rationalität zur Erklärung des Naturgeschehens. Eine uneingeschränkte Vorhersehbarkeit und damit Beherrschbarkeit der

---

En guise d'introduction et en nous appuyant sur l'histoire des mathématiques nous mettons en évidence le changement perpétuel des traits caractéristiques des mathématiques, de la conception des objets mathématiques et de la prédominance des méthodes mathématiques. Nous examinons ensuite l'œuvre mathématique de G. W. Leibniz, soit imprimée soit inédite, pour savoir s'il est possible d'en dégager une unité de fond ou de méthode. Or la multiplicité prédomine, on n'en saurait mettre en évidence une cohérence interne. Nous intercalons un sommaire de la théorie de la connaissance selon Leibniz et nous montrons que le «bonum commune» s'y présente comme objectif suprême du savoir humain. Or la connaissance humaine étant strictement limitée cette fin ne peut être poursuivie qu'à l'aide de certains procédés compensateurs: l'analyse et la synthèse, le repérage d'analogies et la supposition d'une logique universelle. Selon Leibniz cette logique comprend l'«ars judicandi» basée sur le principe de l'identité, et l'«ars inveniendi» appuyée sur le principe de la continuité (l'analogie). L'unité méthodologique dont Leibniz se sert à avancer la connaissance a comme concepts-limite l'unité individuelle (la substance) et l'unité universelle (Dieu resp. sa création) – des concepts corrélatifs qui constituent en même temps des concepts-limite de l'analyse respectivement de la synthèse. Nous examinons ensuite cette unité méthodologique que nous venons de repérer – par rapport à l'analyse et à la synthèse d'objets mathématiques, à l'emploi de structures analogiques de procédés mathématiques et à la raison mathématique déductive et inductive – et nous en dégageons les limites. En conclusion nous proposons des considérations plus générales sur la relativité des points de vue relationnels et surtout corrélatifs.

Welt durch den Menschen schien in greifbare Nähe gerückt zu sein. Im letzten Jahrhundert zeigten dann die experimentellen Naturwissenschaften und die Technik deutliche Grenzen einer umfassenden Mathematisierung der Welt auf. Parallel dazu verlief die Herausarbeitung struktureller und kategorialer Gemeinsamkeiten mathematischer Gegenstände und Methoden. Um die letzte Jahrhundertwende wurde schließlich auch der Glaube an die innermathematische Unfehlbarkeit (Widerspruchsfreiheit) durch die Russellsche Antinomie erschüttert, woraus einerseits die Tendenz zu einer universalen Axiomatisierung der Mathematik und andererseits die Bestrebungen zu einer intuitionistischen Fundierung dieser Disziplin resultierten.

Dem Wandel der zentralen Wesenszüge der Mathematik entspricht der Wandel in der Auffassung der mathematischen Gegenstände. Wurden Zahlen und geometrische Figuren in vorgriechischer Zeit noch weitgehend unreflektiert benutzt, sprach Platon diesen Gebilden ein eigenständiges Sein im Reich der Ideen zu: die bisher realen Gegenstände der Mathematik wurden zu idealen Gegenständen des Geistes. In der frühen Neuzeit gesellten sich diesen Idealisierungen die unendlich kleinen Indivisibilien ('fiktive' Größen) und die imaginären ('falschen') Größen hinzu, die zunächst zwar nicht als reguläre mathematische Objekte akzeptiert wurden, mit denen sich aber formal gut rechnen und letztendlich zu gesicherten mathematischen Ergebnissen gelangen ließ. Die Zahl der rein formalen Kalküle nahm im 18. Jahrhundert in Mathematik und theoretischer Physik stark zu, bis in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts eine Rückbesinnung auf die Grundlagenfragen der Mathematik einsetzte, die in der axiomatischen Mengenlehre ihren bisher letzten Ausdruck fand. Für die numerische Mathematik des 20. Jahrhunderts waren allerdings weniger die Seinsweisen mathematischer Gegenstände von Belang als vielmehr die im Rahmen der Formalisierung und Axiomatisierung der reinen Mathematik entwickelten Kalküle und Algorithmen, mit deren Hilfe mathematische Approximationen und Simulationen unter Einbeziehung statistischer Gesetzmäßigkeiten möglich wurden. Dennoch bleiben bis heute etliche Desiderate hinsichtlich der Gewißheit mathematischer Gegenstände; so etwa die Beweisbarkeit der Existenz unendlicher Mengen (Unendlichkeitsaxiom) oder die Beweisbarkeit der Existenz des Kontinuums geringster Mächtigkeit (Kontinuumshypothese).

Obwohl eine grundsätzliche Reflexion über die mathematischen Methoden im Verlauf der Mathematikgeschichte erst verhältnismäßig spät einsetzte, wurde doch seit frühester Zeit die Beziehung von Mathematik und Logik thematisiert. Hier ist vor allem Aristoteles zu nennen, der die mathematischen Objekte als von den Dingen abstrahierte Eigenschaften ansah und auf diese Eigenschaften die klassische Logik ebenso anwandte wie auf die konkreten Eigenschaften der empirischen Objekte. Die logisch (und

schon teilweise axiomatisch) durchgeformte Mathematik, wie sie in Euklids *Elementen* ihren Höhepunkt fand, ist ohne Aristoteles nicht denkbar. Auf seiten der angewandten Mathematik entwickelte vor allem Archimedes eine erste systematische Approximationsmathematik, indem er die krummlinigen Abstraktionsgebilde wie Kreis, Kugel etc. zu berechenbaren geradlinigen bzw. empirisch bekannten Objekten ins Verhältnis setzte oder sie durch Schrankenbildung näherungsweise bestimmte. Den nächsten großen Fortschritt brachte die Einführung von Buchstaben als Bezeichnung mathematischer Größen (Viète), welche die Algebra revolutionierte, da durch sie eine Vielzahl von Einzelfällen in einer einzigen Formel zusammengefaßt werden konnte. Die konsequente Ausdehnung dieses Verfahrens auf geometrische Objekte gelang Descartes mit seiner Koordinatengeometrie. Als schließlich ab Mitte des 17. Jahrhunderts die transzendenten Größen (Exponentialgleichungen, unendliche Reihen, Differential- und Integralgrößen) hinzukamen, geriet die anschauliche Geometrie durch die einsetzende Algebraisierung und Formalisierung in die Gefahr, weitgehend aus der Mathematik verdrängt zu werden. Zugleich entwickelte sich ein erbitterter Methodenstreit, der vor allem die Zulassung künstlicher, in der Natur nicht nachweisbarer Größen, Bezeichnungen und Verfahren betraf. Auch der Unterschied von Approximationsmathematik und reiner Mathematik wurde erstmals grundlegend problematisiert (Newton, Leibniz). Aber wegen der unbezweifelbaren Erfolge der Mathematik in den exakten Naturwissenschaften obsiegt zunächst die Vertreter einer ergebnisbezogenen Betrachtungsweise: Wenn das mathematische Ergebnis richtig und physikalisch nutzbar war, sollten alle dazu erforderlichen Methoden erlaubt sein. Erst das 19. Jahrhundert unternahm eine methodische Neubegründung nahezu aller mathematischen Objekte, von den natürlichen Zahlen bis hin zur Theorie der Grenzwerte und der Überabzählbarkeit. In unserem Jahrhundert gewannen dann, beflügelt durch die Möglichkeiten der elektronischen Datenverarbeitung, die Algorithmen und Kalküle der diskreten numerischen Mathematik mehr und mehr an Einfluß, so daß sie heute den mengentheoretischen Methoden der reinen Mathematik des Kontinuums den Rang streitig machen. – Im Rückblick läßt sich also feststellen, daß die Mathematikgeschichte erfüllt ist von einer nahezu unbegrenzten Vielfalt mathematischer Methoden und von einem ständigen Auf und Ab methodologischer Prävalenzen.

### *Die Vielheit in Inhalt und Form der mathematischen Publikationen*

Erwägt man die Fragestellung, ob das mathematische Schaffen von G. W. Leibniz stärker von Einheit stiftenden Gesichtspunkten oder mehr von

pluralistischen Aspekten geprägt ist, so drängt sich sofort die zweite Alternative auf. Selbst wenn nur die verhältnismäßig geringe Zahl von Publikationen, die Leibniz auf mathematischem Gebiet vorzuweisen hat, zugrundegelegt wird, dominiert die übergroße Themen- und Verfahrensvielfalt. Die thematischen Inhalte, nach der Chronologie geordnet, reichen von Kombinatorik, Zahlentheorie über Flächenbestimmungen und Integrationen, Reihenlehre, mathematisch-physikalische Problemstellungen, Wirtschaftsmathematik, allgemeine Differentialrechnungstheorie, spezielle Kurven, Differentialgeometrie, Exponentialgleichungen, Differentialgleichungen, mathematische Grundlagenfragen bis hin zur Binärarithmetik und zu Indizierungsverfahren der Determinantenrechnung, wobei diese Aufstellung keinesfalls vollständig sein kann, da jeweils nur das Hauptthema einer Publikation berücksichtigt ist.

Vielleicht erwächst aus dieser großen thematischen Vielheit unverhofft eine Einheit, wenn man das methodische Verfahren der Leibnizschen Publikationen in den Mittelpunkt der Betrachtung stellt. Doch weit gefehlt; auch hierbei stößt man auf Pluralität und Verschiedenartigkeit, wo Einheitlichkeit zu erwarten wäre. Zwar kreist die überwiegende Mehrzahl seiner Publikationen um das Desiderat einer Erweiterung der 'analyse ordinaire' durch Einbeziehung des 'nouveau calcul des transcendantes',<sup>1</sup> worunter Leibniz einmal die Theorie der Exponentialgleichungen und die der unendlichen Reihen, zum anderen aber auch die Theorie der Differentiale bzw. Integrale und der dazugehörigen Gleichungen verstand und in deren Bereich auch eine Vielzahl neuer mathematischer Objekte (Optimierungskurven, differentialgeometrische Kurven) fiel, zu welchen die bisherige Descartessche Mathematik keinerlei adäquaten Zugang bot. Aber die Art und Weise, in der Leibniz diese große mathematische Herausforderung seiner Zeit in seinen Zeitschriftenbeiträgen behandelte, war keineswegs methodisch einheitlich; es sei denn, man sieht die Einheitlichkeit darin, daß, was auch immer Leibniz an neuen mathematischen Erkenntnissen mitteilte, die zu ihrer Entdeckung führende Methode unterschlagen wurde: "Il est bon cependant de ne pas prostituer nos Methodes, sur tout à l'égard des gens, qui en usent avec un peu de supercherie".<sup>2</sup> Die Gründe für den Mangel an methodischer Einheitlichkeit der Vorgehensweise sind weniger bei den Inhalten als bei den Anlässen der Leibnizschen Publikationen zu suchen: Diese wurden nämlich in ihrer überwiegenden Mehrzahl durch die Erfordernisse der *Respublica literaria* bestimmt. So brachte Leibniz in jungen

<sup>1</sup> Vgl. die Abhandlung *Considerations sur la différence qu'il y a à observer entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendantes*, Aug. 1694.

<sup>2</sup> Leibniz an L'Hospital, 8. Mai 1693 (GM II, 238).

Jahren Proben seines Könnens und später Texte zur Sicherung seiner Prioritätsansprüche sowie Reaktionen auf Publikationen oder briefliche Mitteilungen konkurrierender Gelehrter an die Öffentlichkeit, wobei viele Beiträge zugleich auch als Unterstützung der wichtigsten deutschen Gelehrtenzeitschrift, der *Acta eruditorum*, gedacht waren. Publikationen aber, die ein ausgewähltes mathematisches Gebiet systematisch und tendenziell erschöpfend behandelten, suchte man bei dem Autor Leibniz beinahe vergeblich.<sup>3</sup> In Zeitschriftenbeiträgen, die aus den unterschiedlichsten äußeren Anlässen und häufig ohne Zugriffsmöglichkeiten auf frühere Aufzeichnungen zur jeweiligen Thematik niedergeschrieben wurden, mußte die Darlegungsweise zwangsläufig okkasionell und uneinheitlich ausfallen.

#### *Die Vielheit in Inhalt und Form der Briefe und posthumen Veröffentlichungen*

Nun hat Leibniz selbst vor solcherlei Untersuchungen gewarnt, als er sagte: "... qui me non nisi editis novit, non novit".<sup>4</sup> Man wird also neben seinen Publikationen zumindest seine brieflichen Äußerungen und, soweit möglich, seine posthum erschienenen Werke einzubeziehen haben. Die begrenzte Öffentlichkeit der Briefe und insbesondere die von vielen Briefen überlieferten Konzepte, die meist offener und aussagekräftiger sind als die abgesandten Fassungen, lassen einen tieferen Einblick in die Werkstatt seines mathematischen Schaffens erwarten. Ebenso verfeinern die von C. I. Gerhardt, L. Couturat u. a. herausgegebenen Textsammlungen aus dem Nachlaß – die vielfach auf Handschriften basieren, die in einer Reinschrift vorliegen und daher in aller Regel eine größere Reife als andere Texte aufweisen dürften – unser Wissen von der Leibnizschen Gedankenwelt.

Doch was auf dieser neuen Textgrundlage als erstes sichtbar wird, ist eine abermalige Ausweitung der Themenvielfalt und der Darlegungsmethoden. Die geometrische Charakteristik, die 'analysis situs', die Determinantentheorie, Gebiete, über die Leibniz fast nichts publiziert hatte, aber auch Schriften zu den Grundelementen der Mathematik, zur mathematischen Logik oder zur 'mathesis generalis' sind nicht nur im brieflichen Austausch mit den Freunden häufig erwähnte Projekte; in den posthumen Editionen finden sich sogar etliche vergleichsweise systematische Abhandlungen zu

<sup>3</sup> Relativ systematisch sind die Abhandlungen *Nova methodus pro maximis et minimis*, Okt. 1684, *Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum*, Apr. 1691, *Supplementum geometriae practicae*, Apr. 1693, *Nova calculi differentialis applicatio et usus*, Jul. 1694, sowie die beiden Beiträge zur 'scientia infiniti': *Specimen novum analyseos*, Mai 1702, und *Continuatio analyseos quadraturarum*, Jan. 1703.

<sup>4</sup> Leibniz an Placcius, 2. März 1696 (Dutens VI.1, 65).

diesen Gebieten.<sup>5</sup> Aber auch wenn in diesen Abhandlungen häufig auf Definitionen, Axiome, Propositionen und Demonstrationen zurückgegriffen wird oder etliche die Form von sorgfältig ausgearbeiteten Dialogen haben: von einem einheitlichen methodischen Vorgehen kann hier dennoch nicht ernsthaft gesprochen werden. Je nach geplantem Verwendungszweck bzw. intendiertem Adressatenkreis variieren Darlegungsformen und struktureller Aufbau in vielfältiger Weise. Da zu Leibniz' Lebzeiten außer der kombinatorischen Jugendschrift *De arte combinatoria* von 1666 keine mathematische Monographie erschien und auch bis heute lediglich ein halbes Dutzend monographisch ausgeformter mathematischer Texte, von denen vor allem *De quadratura arithmetica*, 1993, und *Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra*, 1976, Erwähnung verdienen, ediert worden sind,<sup>6</sup> kann auch für diese Textgruppe die Annahme einer methodischen Einheitlichkeit nicht aufrechterhalten werden.

#### *Die Vielheit in Inhalt und Form der nachgelassenen Schriften*

Bleibt also die Hoffnung, daß uns die im Nachlaß schlummernden Texte eine bisher verborgen gebliebene Einheit aufzeigen werden. Nun sind aber Nachlaßwerke in aller Regel unfertige, wenig durchgeformte und unredigierte Texte, die entweder nicht für die Öffentlichkeit bestimmt oder gedanklich und sprachlich nicht so weit gediehen waren, daß sie der Öffentlichkeit übergeben werden konnten. Bei Leibniz' Nachlaß kommt erschwerend hinzu, daß er von einem geradezu unvorstellbaren Umfang ist, da dieser Gelehrte die Gewohnheit hatte, fast jeden Notizzettel aufzubewahren. In Anbetracht dieser Papiermenge kann es nicht überraschen, daß von seinem naturwissenschaftlichen Nachlaß nicht einmal die Hälfte katalogisiert und erschlossen ist. Diese Unwägbarkeiten einmal vorausgesetzt, ist es für mich nach einem Vierteljahrhundert täglichen Umgangs mit diesem Handschriftenfundus dennoch unzweifelhaft, daß die mathematischen Manuskripte im Nachlaß eine zumindest ebenso große Vielfalt an Themen und eine vergleichbar große Variationsbreite an methodischen Vorgehensweisen enthalten, wie das bisher aus dem Nachlaß edierte mathematische Œuvre.

<sup>5</sup> Hier nur einige Beispiele: *Nova algebrae promotio*, um 1694; *Mathesis universalis*, um 1694; *In Euclidis πρότα, um 1711; Specimen geometriae luciferae*, um 1714.

<sup>6</sup> Hier sind neben den genannten vor allem E. Knobloch, *Die mathematischen Studien ... zur Kombinatorik*, 1976; H. J. Zacher, *Die Hauptschriften zur Dyadik*, 1973; J. Echeverría, *Characteristica geometrica*, 1979; H. P. Münzenmayer, *Der Calculus Situs und die Grundlagen der Geometrie*, 1978; E. Knobloch, *Der Beginn der Determinantentheorie*, 1980; E. Pasini, *La nozione di infinitesimo*, 1985-1986, anzuführen.

Auch in seinen persönlichsten Aufzeichnungen hat Leibniz keine Konzeption eines einheitlichen Gebäudes seiner mathematischen Errungenschaften und keinen Entwurf einer einheitlichen Methode ihrer Herleitung hinterlassen.<sup>7</sup> Die 'scientia infiniti' ist nicht einmal in Teilen geschrieben worden, die 'analysis situs' und die 'characteristica universalis' liegen lediglich in thematisch sehr begrenzten und methodisch variierenden Konzepten vor. Seine Algebra und seine diophantische Arithmetik waren an den neuen Aufgabenstellungen sachlich und methodisch weitgehend gescheitert. Vor diesem Hintergrund ist auch im Opus posthumum von G. W. Leibniz keine Einheit in Inhalt und Form zu erwarten.

### *Ein Abriß der Leibnizschen Erkenntnistheorie*

Ist somit auf Einheit im mathematischen Schaffen des berühmten Barockgelehrten endgültig zu verzichten? Haben seine grenzenlosen mathematisch-naturwissenschaftlichen Interessen und Bemühungen zu einer inhaltlich und formal rein additiven Wissensanhäufung in seinem Denken und Schaffen geführt? Galt ihm letztlich Quantität und Priorität mehr als Qualität und Perfektion? Während unsere bisherigen Darlegungen die Bejahung der ersten beiden Fragen nahelegen könnten, müssen bei der Beantwortung der dritten Frage Zweifel aufkommen: Hatte nicht gerade Leibniz seine Entdeckungen auf dem Gebiet der Infinitesimalrechnung fast 10 Jahre lang zurückgehalten? Hatte er seine Kreisquadratur nicht – nach einem ersten Publikationsversuch – trotz Drängens seiner Freunde zur Seite gelegt, weil sie seiner Meinung nach nicht mehr dem Stand der Forschung entsprach? Hatte nicht der Nestor der Infinitesimalrechnung, um seine grundlegende Schrift zur 'scientia infiniti' reicher und vollständiger werden zu lassen, Jacob Bernoulli u. a. eingeladen, aktuelle Beiträge beizusteuern? Wenn Leibniz also doch Qualität und Perfektion – trotz aller Vielseitigkeit und Variabilität – am Herzen lagen, so muß seinem Erkenntnisstreben eine Wertordnung zugrundegelegen haben, deren Kenntnis für die Beantwortung der aufgeworfenen Fragen unerlässlich ist.

Das Wissen des Menschen ist nach Leibniz' Überzeugung nicht Selbstzweck, sondern es dient dem "bien commun, qui n'est point different de la

---

<sup>7</sup> Übersichten über den mathematischen Nachlaß gibt es leider nur für die Pariser und die ersten hannoverschen Jahre; vgl. E. Knobloch, *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672-1676)*, 1978, bzw. H.-J. Heß, *Maturing in retirement. The unknown period of Leibnizian calculus between Paris and publication (1676-1684)*, 1991.

gloire de Dieu".<sup>8</sup> Da die menschlichen Erkenntnisvermögen im Gegensatz zum göttlichen grundsätzlich begrenzt und weniger leistungsfähig sind, bedürfen sie methodischer Verfahren, um die kreatürlichen Unzulänglichkeiten so weit wie möglich zu kompensieren. Zu diesen Verfahren gehören Analyse und Synthese,<sup>9</sup> das Auffinden von Analogien<sup>10</sup> sowie die Annahme einer universalen Logik.<sup>11</sup> Die Analyse von Begriffen und Gegenständen mit dem Ziel, alle ihre Eigenschaften zu bestimmen, sowie die gegenläufige Synthese von Teilstücken zu einem größeren relativen Ganzen erhalten ihre fundamentale Bedeutung durch die Leibnizsche Überzeugung, daß die Vernunftwahrheiten analytische Urteile sind, während die kontingenten (zufälligen) Wahrheiten die Form synthetischer Urteile haben. Bei der Analyse gilt es, letzte Grundeinheiten (primitive Elemente) zu finden, die Synthese führt durch Kombination bereits bekannter Teilerkenntnisse zu einer neuen, umfassenderen Erkenntnis. Die für die unvollkommenen menschlichen Erkenntnisvermögen typischen Analogien sind Vergleichbarkeiten insbesondere formaler und struktureller Art, wie sie am einfachsten in den Proportionen geometrischer Größen zum Ausdruck kommen, wie sie aber auch in der höheren Mathematik etwa bei der Bildung der n-ten Potenz eines Binoms bzw. bei der Bildung der n-ten Ableitung eines Produktes zweier Funktionen augenfällig werden. Schließlich müssen alle menschlichen Erkenntnisse mittels einer durchgängigen Logik miteinander verknüpft sein, einer Logik, die sowohl allem durch Gott Geschaffenen als auch unserem Wissen von den geschaffenen Dingen zugrundeliegt. Erst die Identität von Schöpfungslogik und Erkenntnislogik garantiert die Kompatibilität von Sein und Wissen.

Was folgt nun aus dieser Konzeption der Leibnizschen Erkenntnistheorie für die Frage nach Einheit und Vielheit in seinem mathematischen

<sup>8</sup> GP VI, 27.

<sup>9</sup> Vgl. die grundlegende Abhandlung *De synthesisi et analysi universalis seu arte inveniendi et iudicandi* aus der Zeit 1680-1684 (GP VII, 292-298).

<sup>10</sup> Der Begriff 'Analogie' ist bei Leibniz von einer beinahe unbegrenzten Variabilität und, soweit uns bekannt, nirgendwo exakt definiert. Einziges Kriterium der Verwendung ist die Vergleichbarkeit, unter der Prämisse, daß keine Gleichheit vorliegt. Dabei kann das 'tertium comparationis' fast beliebig gewählt werden: inhaltlich, formal, strukturell etc. Sehr häufig vorkommende Analogien sind bei Leibniz *corps (substance)* und *esprit (âme)*, *choses sensibles* und *choses insensibles* sowie *plantes* und *animaux*.

<sup>11</sup> "Et vero reapse in Mundo deprehendimus omnia fieri secundum leges aeternarum veritatum non tantum Geometricas sed et Metaphysicas, id est non tantum secundum necessitates materiales, sed et secundum rationes formales; idque verum est non tantum generaliter in ea quam nunc explicavimus ratione Mundi existentis potius quam non existentis, et sic potius quam aliter existentis ..., sed etiam ad specialia descendendo videmus mirabili ratione in tota natura habere locum leges metaphysicas causae, potentiae, actionis ..." (GP VII, 305).

Schaffen? Zunächst einmal offensichtlich nicht die Einheitlichkeit der mathematischen Erkenntnisse oder gar ein einheitliches mathematisches System (vergleichbar etwa dem Bourbaki-Projekt); denn über die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Erkenntnisgegenstände und ihrer spezifischen gegenseitigen Beziehungen läßt sich aus einer solchen Konzeption nichts Definitives herleiten. Aber wohl auch nicht die Einheitlichkeit der mathematischen Methode (vergleichbar etwa der Hilbertschen Axiomatik in der Geometrie); denn Leibniz betont immer wieder "variare methodos ad perfectionem scientiae pertinet, quia aliae Methodi aliis problematis sunt aptiores, et quasi a natura assignatae".<sup>12</sup> Folglich kann eine möglicherweise vorhandene Einheit nur auf einer höheren Reflexionsebene gesucht werden.

Der Begriff 'Einheit' hat zwei Grenzbedeutungen: eine als kleinstmögliche Einheit im Sinne von unteilbar oder letztgültig (*Unum*) und eine als alles umfassende Einheit im Sinne von vollständig oder vollkommen (*Totum*). Daher scheint es so, als ob der Begriff 'Einheit' zwei entgegengesetzte Dinge, nämlich das Individuale bzw. das Universale, bezeichne. Diese Begriffe sind aber nur Korrelata ein und derselben Relation: Ist das Ganze mehr als die Summe seiner Teile, so bildet es eine individuelle Einheit; ist das Individuum mehr als ein bloßes Teilstück eines größeren Ganzen, so bildet es eine ganzheitliche Einheit. In Leibniz' Metaphysik sind nun diese Grenzbedeutungen leicht zuzuordnen: Die kleinstmögliche Einheit ist die Substanz oder Monade; die alles umfassende Einheit ist die Schöpfung als Reich der Gnade. Erkenntnistheoretisch formuliert, ist der Zielpunkt der Analyse die substantielle, charakteristische Einheit und der für den Menschen nie erreichbare Endpunkt der Synthese die Welterkenntnis Gottes. Die diesen Korrelata zugrundeliegende methodologische Relation ist die Logik in der Leibnizschen Auffassung dieses Begriffs: "Unter der Logick oder Denckkunst verstehe ich die Kunst den verstand zu gebrauchen, also nicht allein was fůrgestellet zu beurtheilen, sondern auch was verborgen zu erfinden".<sup>13</sup> Diese Logik geht analysierend und synthetisierend ihrer Aufgabe der Erkenntnisgewinnung nach und bedient sich dabei der Gleichheit (Prinzip der Identität und des 'tertium non datur') im Bereich der 'ars iudicandi' und der Analogie (Prinzip der Kontinuität<sup>14</sup>) im Bereich der 'ars inveniendi'. An dieser erkenntnistheoretisch-methodologischen Einheit von Individualität und Totalität, von Analyse und Synthese, von Identität und Analogie sowie von 'ars iudicandi' und 'ars inveniendi' müssen sich also

<sup>12</sup> Leibniz für die *Acta eruditorum*, 17. Oktober 1684 (A III.4, 180).

<sup>13</sup> Leibniz an Gabriel Wagner, Ende 1696 (GP VII, 516).

<sup>14</sup> "Analogia autem in eo fundatur, ut quae in multis conveniunt aut opposita sunt, ea in datis quoque vicinis ad priora convenire aut opposita esse suspicemur" (A VI.3, 425 f.).

Qualität und Perfektion auch von mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkenntnissen messen lassen; sie ist das einende und Vollkommenheit stiftende Band von Geometrie und Algebra.

### *Die Einheit von Analyse und Synthese mathematischer Gegenstände*

Wie sieht nun diese methodologische Einheit der Leibnizschen Erkenntnistheorie im Bereich der mathematischen Erkenntnisgewinnung aus? Da ist zunächst die Einheit von Analyse und Synthese herauszustellen, ein Begriffspaar, welches in der Mathematikgeschichte bisher eher konträre Methoden gekennzeichnet hatte. Für die Analyse als Zergliederung bis in die letzten Grundbegriffe bildeten die Euklidischen *Elemente* das Paradigma, für die Synthese zu einer Theorie aller geometrischen Kurven auf der Basis der sie repräsentierenden algebraischen Gleichungen und ihrer Schnittgebilde war im 17. Jahrhundert die Descartessche *Geometria* das allseits anerkannte Vorbild. Leibniz versuchte nun beide methodischen Ansätze miteinander zu verbinden und sowohl die Rückführung auf Grundelemente als auch die Zusammenfassung zu einer alle Möglichkeiten umfassenden Gesamtheit als notwendig aufeinander bezogene Verfahren hinzustellen. Dies wird besonders deutlich in der Gleichungslehre, wo er einerseits bestrebt war, das Problem der algebraischen Gleichungen höheren Grades auf bestimmte Lösungsformen (z. B. Cardanische) bzw. auf bestimmte Gleichungsformen (Formentafeln) zurückzuführen, und andererseits die algebraischen Gleichungen – als endliche Gleichungen mit einem bestimmten Grad – einzuordnen in die Gesamtheit aller möglichen Gleichungen, zu denen er auch die transzendenten Gleichungen zählte.<sup>15</sup> Vergleichbares läßt sich auch in der Integrationstheorie aufzeigen, wo Leibniz zum einen glaubte, die Bestimmung aller unbestimmten Integrale auf die Quadratur weniger Grundintegrale (z. B. des Kreises und der Hyperbel) reduzieren zu können, und zum anderen ein allgemeines für alle Integrationsaufgaben gültiges Lösungsverfahren durch Potenzreihenansatz mit unbestimmten Koeffizienten entwickelte. Daß er sich bewußt war, daß die methodologische Einheit von Analyse und Synthese auch zwei Vorgehensweisen eint, die in der Mathematikgeschichte häufig genug Anlaß zum Methodenstreit gegeben haben, zeigt das folgende Zitat: "Analysis

<sup>15</sup> Die Gleichungen teilte Leibniz in algebraische mit der Untergliederung in rationale (diophantische) bzw. irrationale Gleichungen einerseits und transzendente mit der Untergliederung in endliche bzw. unendliche Gleichungen andererseits. Die endlichen transzendenten Gleichungen wiederum wurden in Exponentialgleichungen und Differential- bzw. Integralgleichungen unterteilt; die unendlichen Gleichungen waren Potenzreihen.

enim duorum est generum, una per saltum, cum problema propositum resolvimus ad prima usque postulata; altera per gradus, cum problema propositum reducimus ad aliud facilius".<sup>16</sup>

### *Die Einheit von analogen Strukturen mathematischer Verfahren*

Der Begriff 'Analogie' bezieht sich bei Leibniz manchmal auf Dinge,<sup>17</sup> häufiger auf Größen oder geometrische Figuren. Von besonderer Wichtigkeit ist die Analogie von Verhältnissen oder, wie wir heute sagen würden, von Strukturen. Sowohl bei Größen und Figuren als auch bei Strukturen spricht Leibniz von 'Analogie', wenn keine Gleichheit, sondern lediglich Ähnlichkeit vorliegt: "analogia seu ipsarum similitudinum comparatio"<sup>18</sup> Die wohl wichtigste Analogie in der Leibnizschen Mathematik ist die zwischen den Verhältnissen bei beliebig kleinen Größen bzw. Figuren (insbesondere beim charakteristischen Dreieck) und den Verhältnissen bei dazu ähnlichen endlichen Größen bzw. Figuren. Diese Analogie von infinitesimalen Strukturen und finiten Strukturen setzt ebenso eine durchgängige Homogenität mathematischer Größen voraus wie die Analogie der Ordnungsstruktur einer endlichen Reihe zur Ordnungsstruktur der entsprechenden ins Unendliche fortgesetzten Reihe. Aber auch endliche Iterationsstrukturen weisen untereinander analoge Eigenschaften auf. Berühmtestes Beispiel ist die Analogie von  $n$ -ter Binompotenz und  $n$ -ter Ableitung eines Produktes, eine Analogie, die Leibniz sogar bis zu den gebrochenen Potenzen verfolgte. Die analogen Strukturen von iterativen Approximationsverfahren (Picardsches Verfahren) gehören ebenfalls hierher. Als letzten Beleg für die Analogie von Strukturen wollen wir das sog. Prinzip der Komplementarität anführen, welches die Möglichkeit eröffnet, die Lösung eines Problems (teilweise) im inversen Operationsbereich durchzuführen. Klassisches Beispiel für ein solches Vorgehen ist das Wurzelziehen, welches durch Potenzieren von Zwischenergebnissen erreicht wird. Entsprechendes gilt für das Logarithmieren.<sup>19</sup> Leibniz übertrug dieses Verfahren auf das Integrieren und auf das Lösen von Differentialgleichungen durch Lösungsansätze. Nur am Rande sei erwähnt, daß insbesondere die Anwendung mathematischer Methoden (z. B. der Infinitesimalrechnung) auf physikalische Probleme im-

<sup>16</sup> Leibniz an Huygens für Fatio de Duillier, 5. Oktober 1691 (GB, 677).

<sup>17</sup> "Il faut s'accoutumer aux analogies, sçavoir deux ou plusieurs choses fort differentes estant données, trouver leur ressemblances" (A VI.3, 673).

<sup>18</sup> C, 434.

<sup>19</sup> Genaugenommen tritt der Wechsel in den Komplementärbereich schon bei der Division (von Termen) auf.

plizit eine Analogie der Struktur physikalischer Gesetze zur mathematischen Struktur voraussetzt.

*Die Einheit von Logik und Erfindungskunst beim mathematischen Erkenntnisfortschritt*

Wie oben dargelegt, fällt der Logik nach Leibniz nicht nur die Aufgabe des Urteilens und Schließens auf der Grundlage vorgängiger Urteile und Schlüsse zu, sondern auch die Verpflichtung, neue Entdeckungen zu machen. Für das Gebiet der Mathematik bedeutet dies, daß die Logik nicht nur bereits bekannte oder vermutete Sätze beweisen oder widerlegen soll, sondern sich aktiv an der Aufstellung neuer Sätze und Theorien beteiligen muß. Dies soll vor allem durch die Erfindung aussagekräftiger Symbole oder Charaktere für die betreffenden mathematischen Gegenstände, durch die Bereitstellung optimaler Verknüpfungen und Kalküle für solche Charaktere sowie durch die Kombination bereits bekannter Teilerkenntnisse zu neuen Erkenntnissen geschehen. Leibniz bezeichnete diese Tätigkeit der logischen Vernunft als 'ars' und brachte damit deutlich zum Ausdruck, daß es sich dabei nicht um ein zwangsläufig erfolgreiches Vorgehen handeln kann. Beispiele für gelungene Fortschritte sind, neben dem berühmten Differentialkalkül und seinen Anwendungen in Geometrie und Physik, die durch geschickte Indizierung erreichte Lösung linearer Gleichungssysteme mittels Determinanten und die Anfänge einer entalgebraisierten Inzidenzgeometrie der Lage. Ebenso unübersehbar ist aber auch die Begrenztheit der Erfolge dieser Einheit von deduktiver und induktiver Vernunft. Bei den Diophantischen Gleichungen, bei vielen speziellen Kurven oder in der numerischen Reihenlehre – um nur drei Beispiele zu nennen – gelang es Leibniz nicht, allgemeine und allgemeingültige Lösungswege aufzuzeigen. Die Vielfältigkeit und Disparatheit dieser mathematischen Gegenstände war zu groß, die notwendigen neuen Gesichtspunkte und Betrachtungsweisen lagen zu weit von den bisherigen Vorgehensweisen entfernt, als daß die methodologische Einheit von 'ars judicandi' und 'ars inveniendi' allein ausgereicht hätte, um zum Ziel zu kommen. Hier waren grundlegend neue mathematische Theorien erforderlich, nicht geschickte Kombination und Fortschreibung von Bekanntem. Abschließend ist somit festzustellen, daß trotz aller methodologischen Einheitlichkeit der mathematischen Erkenntnisgewinnung die charakteristische Vielheit möglicher mathematischer Gegenstände und Strukturen nicht ausreichend erfaßt wird. Eine 'reductio ad calculum' ist nicht einmal innerhalb der Mathematik uneingeschränkt und rein rational durchführbar, viel weniger noch ist dies in den angewand-

ten Naturwissenschaften möglich. Eine optimale Kompensation der Unzulänglichkeiten menschlicher Erkenntniskraft war auf dem von Leibniz vorgeschlagenen Weg nicht erreichbar.

### *Kategoriales Denken und Relativität*

“*Harmonia autem est unitas in multitudine...*”, sagt Leibniz in einer Aufzeichnung<sup>20</sup> von 1677, und einige Jahre später erläutert er:<sup>21</sup> “Nun die Einigkeit in der vielheit ist nichts anders als die übereinstimmung, und weil eines zu diesem näher stimmt als zu jenem, so fließet daraus die ordnung, von welcher alle schönheit hehrkomt...”. Die Einheit in der Vielheit ist also eine akzidentelle Einheit, die sich von der substantiellen Einheit der Monaden grundlegend unterscheidet. Sie ist eine Ordnung der Dinge oder der Gedanken, die nicht notwendig, nicht einzigartig und nicht ewig ist und doch vom Menschen als hilfreich und angenehm angesehen wird.<sup>22</sup> Sie wird konstituiert durch den Vergleich von Objekten mittels der Sinne und des Verstandes und ist daher auf der Ebene der Vergleichsobjekte immer relational. Auf der Metaebene aber ist sie relativ, denn jede spezielle Ordnungsstruktur ist wieder eine Einheit in bezug auf die Vielheit möglicher struktureller Gliederungen ähnlich wie jede Monade Teil eines Aggregats von Monaden mit einer Zentralmonade sein kann.<sup>23</sup> Für Leibniz waren solche Einheiten allerdings zugleich metaphysische und damit ontologische Einheiten, für uns Heutige sind sie zumindest methodische Hilfsmittel, die aus den klassischen korrelativen Denkkategorien Einheit und Vielheit fließen. Als Regulative sind sie grundsätzlich von nur relativer Bedeutung, d. h. was als Einheit und was als Vielheit anzusehen ist, bestimmt sich relativ zur Reflexionsebene bzw. zu den Bezugsgrößen. Dies sei an einem Teilgebiet der Mathematik verdeutlicht. Die Gesamtheit aller Zahlen besteht

<sup>20</sup> Randnoten von G. W. Leibniz zum Brief A. Eckhard an Leibniz, Ende Mai/Anfang Juni 1677 (GP I, 232).

<sup>21</sup> GP VII, 87.

<sup>22</sup> “Je demeure d'accord, qu'il y a des degrés de l'unité accidentelle, qu'une société réglée a plus d'unité qu'une cohue confuse et qu'un corps organisé ou bien une machine a plus d'unité qu'une société, c'est à dire il est plus à propos de les concevoir comme une seule chose, parcequ'il y a plus de rapports entre les ingrediens; mais enfin toutes ces unités ne reçoivent leur accomplissement que des pensées et apparences, comme les couleurs et les autres phenomenes, qu'on ne laisse pas d'appeller reels” (Leibniz an Arnauld, 10. Mai 1687; GP II, 100).

<sup>23</sup> “...chaque substance simple ou Monade distinguée, qui fait le centre d'une substance composée (comme par exemple, d'un animal) et le principe de son Unicité, est environnée d'une Masse composée par une infinité d'autres Monades, qui constituent le corps propre de cette Monade centrale, suivant les affections duquel elle represente, comme dans une maniere de centre, les choses qui sont hors d'elle” (GP VI, 598 f.).

aus ineinander geschachtelten Teilbereichen, die jeweils als Einheit oder Äquivalenzklasse angesehen werden können: das Einselement, die natürlichen Zahlen, die rationalen Zahlen, die algebraischen Zahlen usw. Entsprechend kann die Gesamtheit aller Zahlen als Vielheit, bestehend aus den genannten Einheiten und ihren durch die Forderung nach uneingeschränkter Ausführbarkeit mathematischer Verknüpfungen bedingten Erweiterungen, betrachtet werden.

Die Korrelata Einheit und Vielheit und die Relativität der daraus resultierenden Einteilungen sind für die menschliche Denk- und Anschauungsweise keinesfalls untypisch oder singulär. Vergleichbare methodische Hilfsmittel bilden auch die Korrelata Ursache und Wirkung oder Notwendigkeit und Zufälligkeit. Für Leibniz jedoch waren alle diese Denkkategorien nicht unabhängig von Seinskategorien; die durch die Denkkategorien charakterisierten Gliederungen beschrieben zugleich eine ontologische Struktur, deren absolute Grenzbegriffe die Monade einerseits und die von Gott geschaffene Welt andererseits waren.

#### BIBLIOGRAPHIE

- Echeverría, J., *Characteristica geometrica*. Paris 1979 [Masch.]. Teile daraus mit franz. Übersetzung in: G. W. Leibniz, *la caractéristique géométrique*, hrsg. von J. Echeverría u. M. Parmentier. Paris 1995.
- Heß, H.-J., *Maturing in retirement. The unknown period of Leibnizian calculus between Paris and publication (1676-1684)*, in: *Giornate di storia della matematica, Cetraro (Cosenza) Settembre 1988*, hrsg. von M. Galuzzi. Commenda di Rende 1991, S. 247-288.
- Leibniz, G. W., *Dissertatio de arte combinatoria*. Leipzig 1666 (A VI.1, 163-230).
- Leibniz, G. W., *Schediasma de arte inveniendi theoremata*, 7. September 1674 (A VI.3, 421-426).
- Leibniz, G. W., *De vita beata*, Frühj.-Herbst 1676 (A VI.3, 633-673).
- Leibniz, G. W., *Characteristica verbalis*, um 1680 (C, 432-435).
- Leibniz, G. W., *De synthesisi et analysi universali seu arte inveniendi et judicandi*, 1680-1684 (GP VII, 292-298).
- Leibniz, G. W., *Nova methodus pro maximis et minimis*, in: *Acta eruditorum*, Oktober 1684, S. 466-473.
- Leibniz, G. W., *Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum*, in: *Acta eruditorum*, April 1691, S. 178-182.
- Leibniz, G. W., *Supplementum geometriae practicae*, in: *Acta eruditorum*, April 1693, S. 178-180.

- Leibniz, G. W., *Nova calculi differentialis applicatio et usus*, in: *Acta eruditorum*, Juli 1694, S. 311-316.
- Leibniz, G. W., *Considerations sur la différence qu'il y a à observer entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendentes*, in: *Journal des Sçavans*, 23 Aoust 1694, S. 404-406.
- Leibniz, G. W., [Von der Weisheit], um 1694 (GP VII, 86-90).
- Leibniz, G. W., *Nova algebrae promotio*, um 1694 (GM VII, 154-189).
- Leibniz, G. W., *Mathesis universalis*, um 1694 (GM VII, 49-76).
- Leibniz, G. W., *De rerum originatione radicali*, 3. Dezember 1697 (GP VII, 302-308).
- Leibniz, G. W., *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti, circa summas et quadraturas*, in: *Acta eruditorum*, Mai 1702, S. 210-219.
- Leibniz, G. W., *Continuatio analyseos quadraturarum rationalium*, in: *Acta eruditorum*, Januar 1703, S. 19-26.
- Leibniz, G. W., *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal*. Amsterdam 1710 u. ö. (GP VI, 21-365).
- Leibniz, G. W., *In Euclidis πρώτα*, um 1711 (GM V, 183-211).
- Leibniz, G. W., *Principes de la nature et de la grace*, 1714 (GP VI, 598-606).
- Leibniz, G. W., *Specimen geometriae luciferae*, um 1714 (GM VII, 260-299).
- Leibniz, G. W., *Opera omnia*, hrsg. von L. Dutens. 6 Bde. Genf 1768. Reprint Hildesheim 1989 (Dutens).
- Leibniz, G. W., *Mathematische Schriften*, hrsg. von C. I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin-Halle 1849-1863. Reprint Hildesheim 1962 u. ö. (GM).
- Leibniz, G. W., *Die philosophischen Schriften*, hrsg. von C. I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin 1875-1890. Reprint Hildesheim 1961-1962 u. ö. (GP).
- Leibniz, G. W., *Der Briefwechsel mit Mathematikern*, hrsg. von C. I. Gerhardt. Berlin 1899. Reprint Hildesheim 1962 u. ö. (GB).
- Leibniz, G. W., *Opuscules et fragments inédits*, hrsg. von L. Couturat. Paris 1903. Reprint Hildesheim 1961 u. ö. (C).
- Leibniz, G. W., *Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von der (ehemals Preußischen, dann Deutschen) Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 7 Reihen. Darmstadt-Leipzig-Berlin 1923 ff. (A).
- Leibniz, G. W., *Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra*, hrsg. von E. Knobloch. Stuttgart-Bad Cannstadt [1976].
- Leibniz, G. W., *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae*, hrsg. von E. Knobloch. Göttingen 1993.
- Knobloch, E., *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Textband (= *Studia Leibnitiana, Supplementa XVI*). Wiesbaden 1976.
- Knobloch, E., *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672-1676)*, in: *Leibniz à Paris (1672-1676), Symposium à Chantilly November 1976* (= *Studia Leibnitiana, Supplementa XVII*). Wiesbaden 1978, S. 3-43.
- Knobloch, E., *Der Beginn der Determinantentheorie. Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül*. Textband. Hildesheim 1980.

- Münzenmayer, H. P., *Der Calculus Situs und die Grundlagen der Geometrie bei Leibniz*. München 1978 [Diss.].
- Pasini, E., *La nozione di infinitesimo in Leibniz: tra matematica e metafisica*. Torino 1985-1986 [Masch.].
- Zacher, H. J., *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz. Ein Beitrag zur Geschichte des binären Zahlensystems (= Veröffentlichungen des Leibniz-Archivs 5)*. Frankfurt am Main 1973.